

Carnet de recherche de

Mathématiques

PYRAMIDES DE NOMBRES

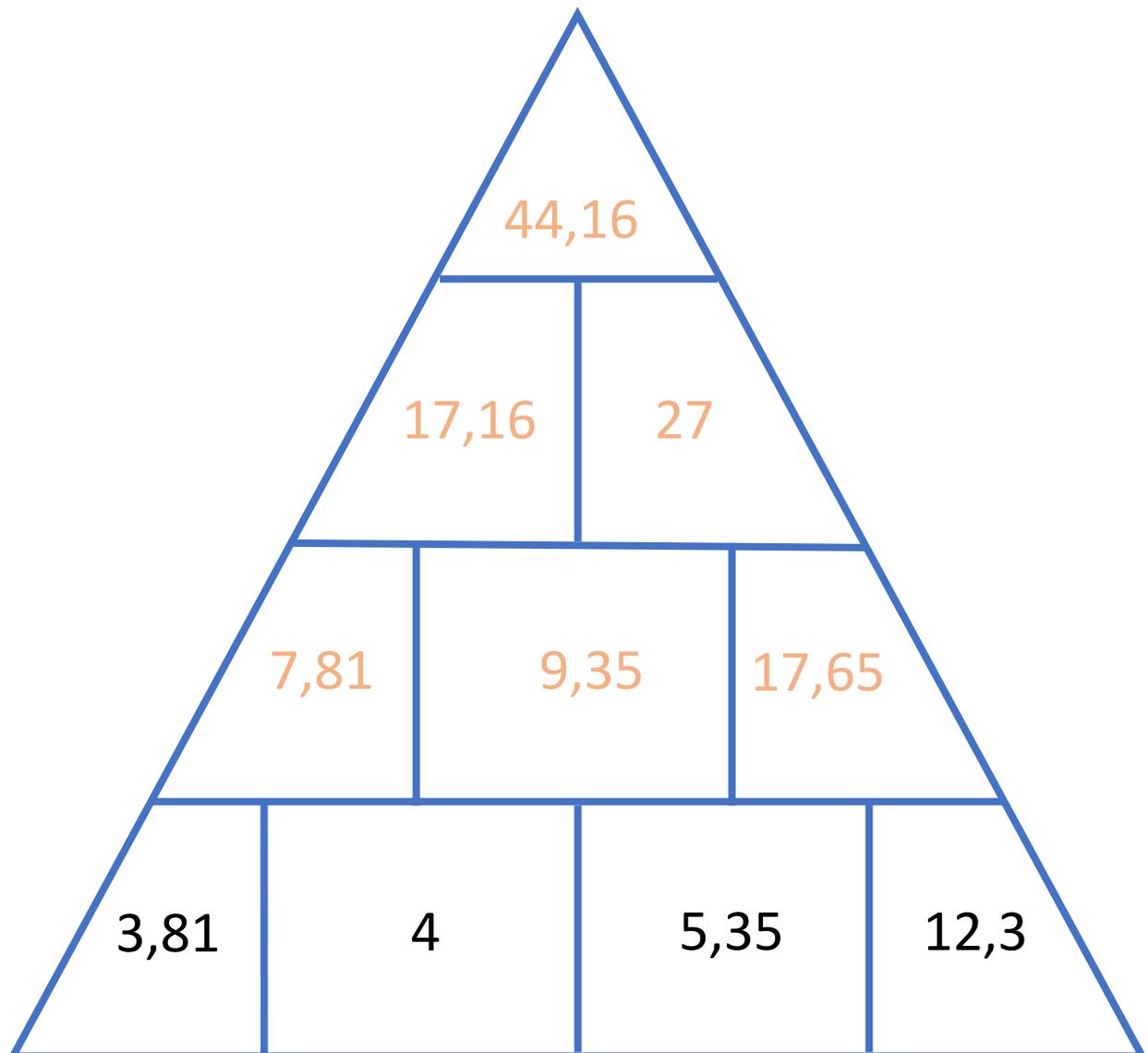


Laboratoire de Mathématiques
Alpesⁿ
ACADÉMIE AIX-MARSEILLE

M.Giai, 2023

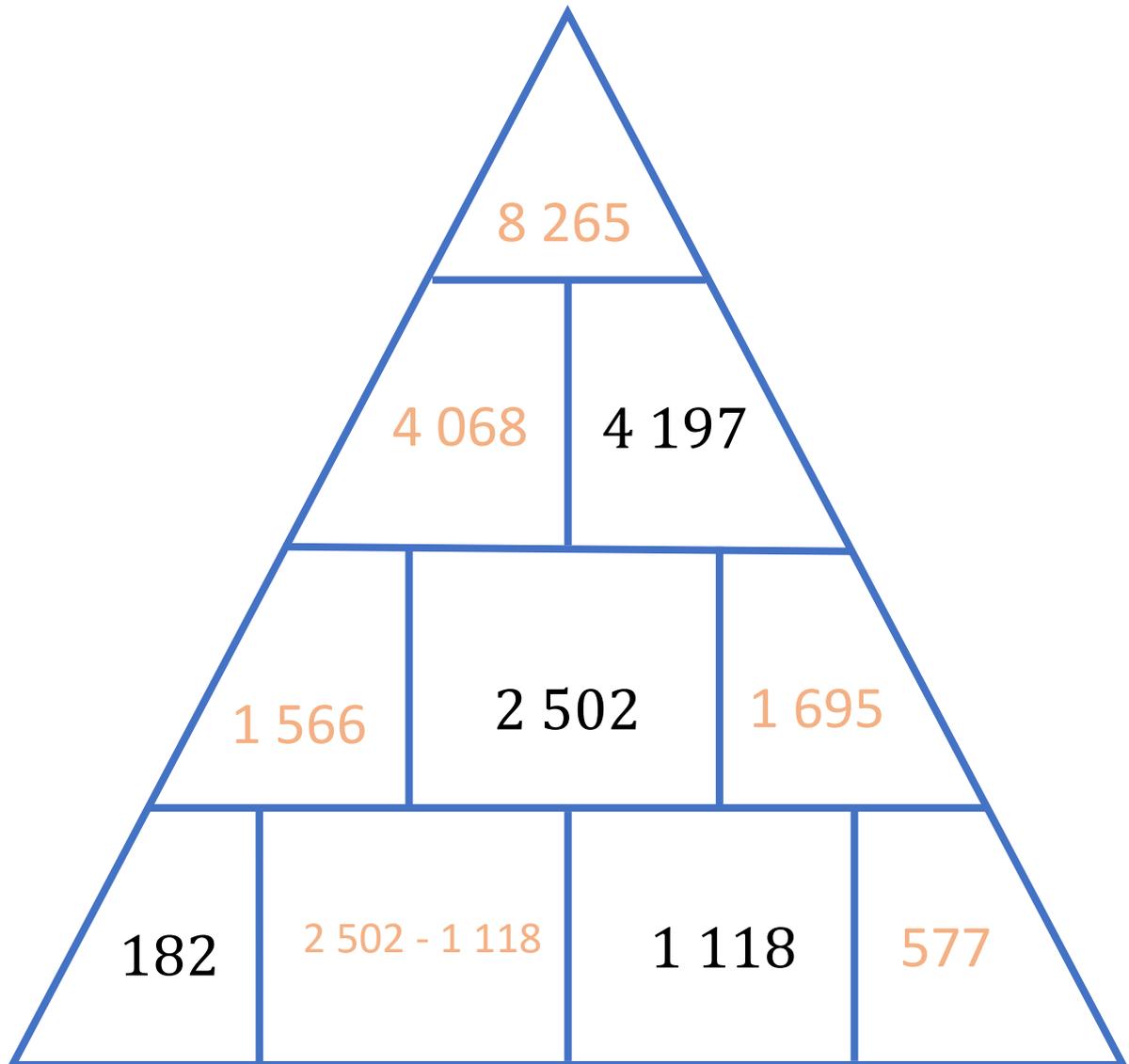
SÉRIE I – SOMMES

1. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous.



(Série I.)

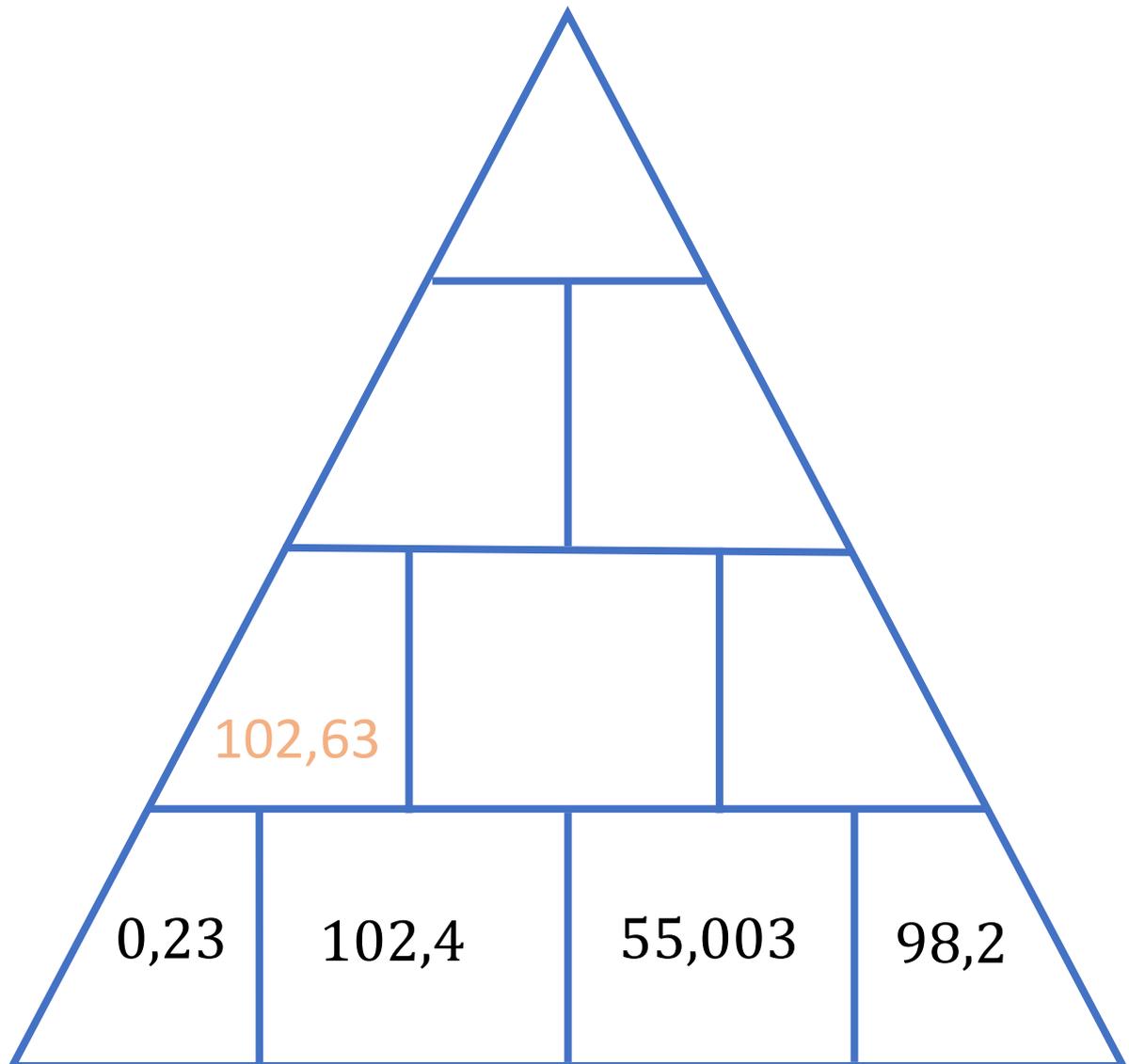
2. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode : additions et soustractions...

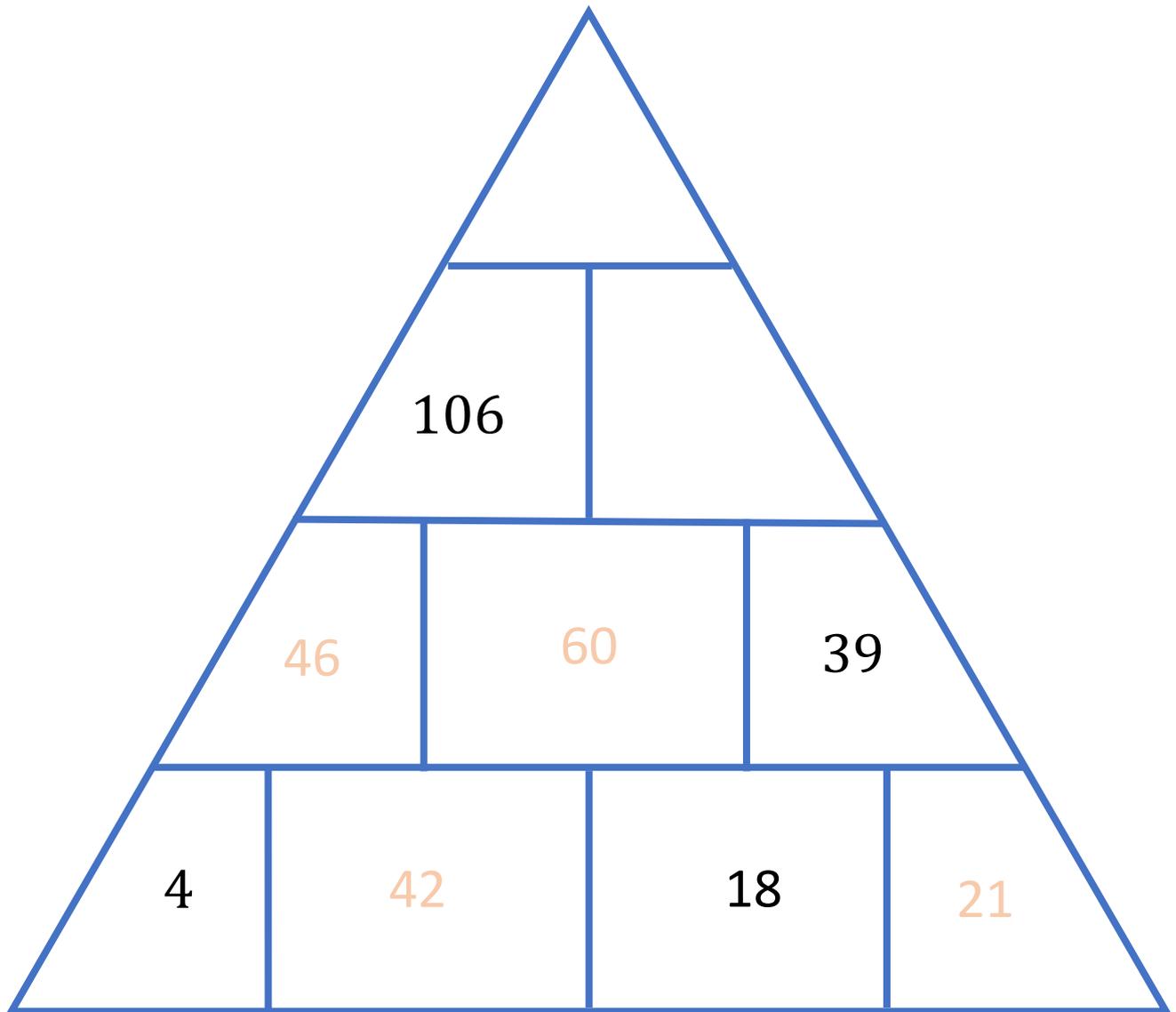
(Série I.)

3. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous.



(Série I.)

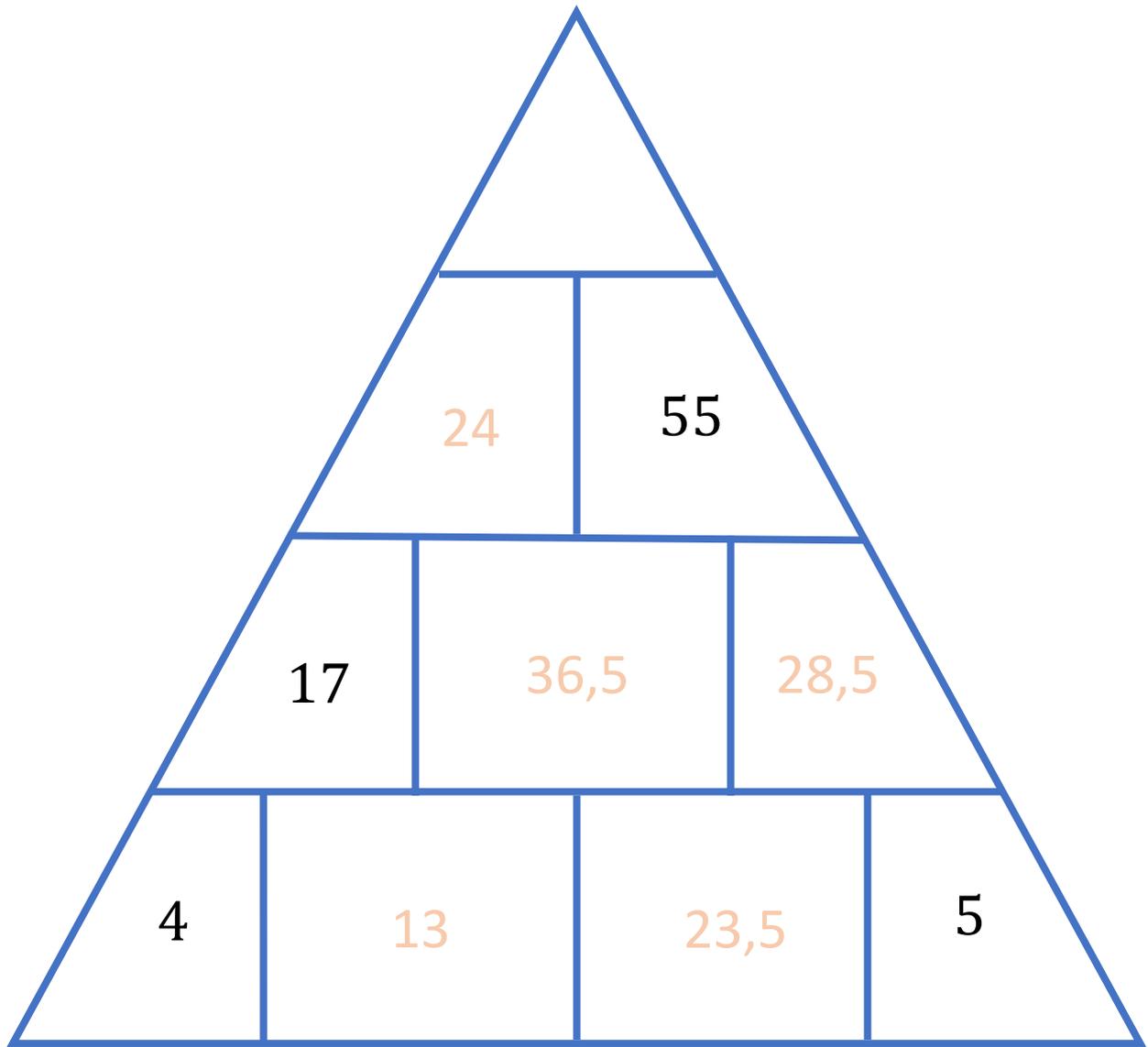
4. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série I.)

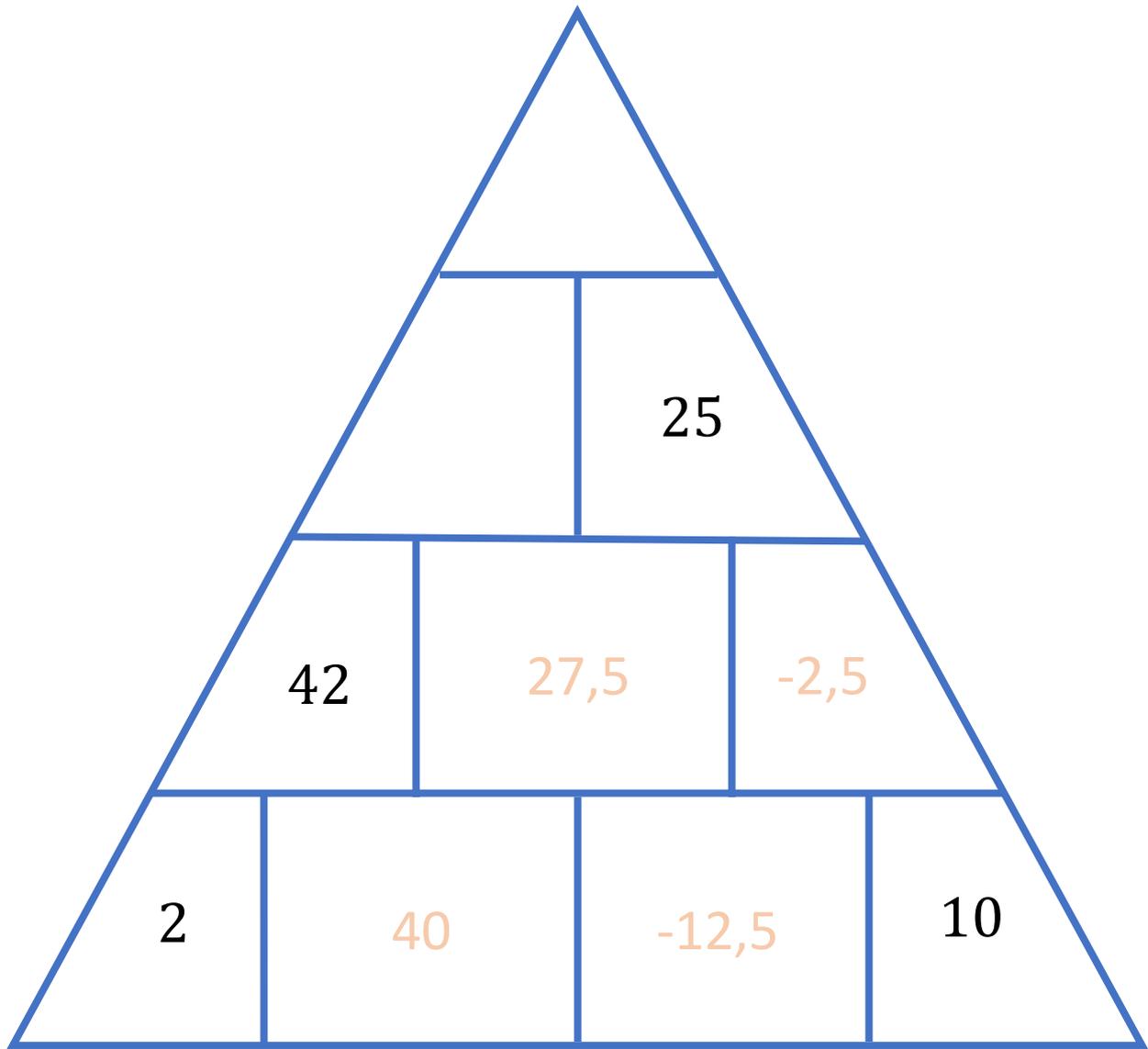
5. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode : pour cycle 3, recherche par tâtonnements et ordres de grandeurs (on peut aussi introduire peu à peu la notion de variable, avec un symbole). Nécessité dans cette énigme de « sortir » du cadre des nombres entiers.

(Série I.)

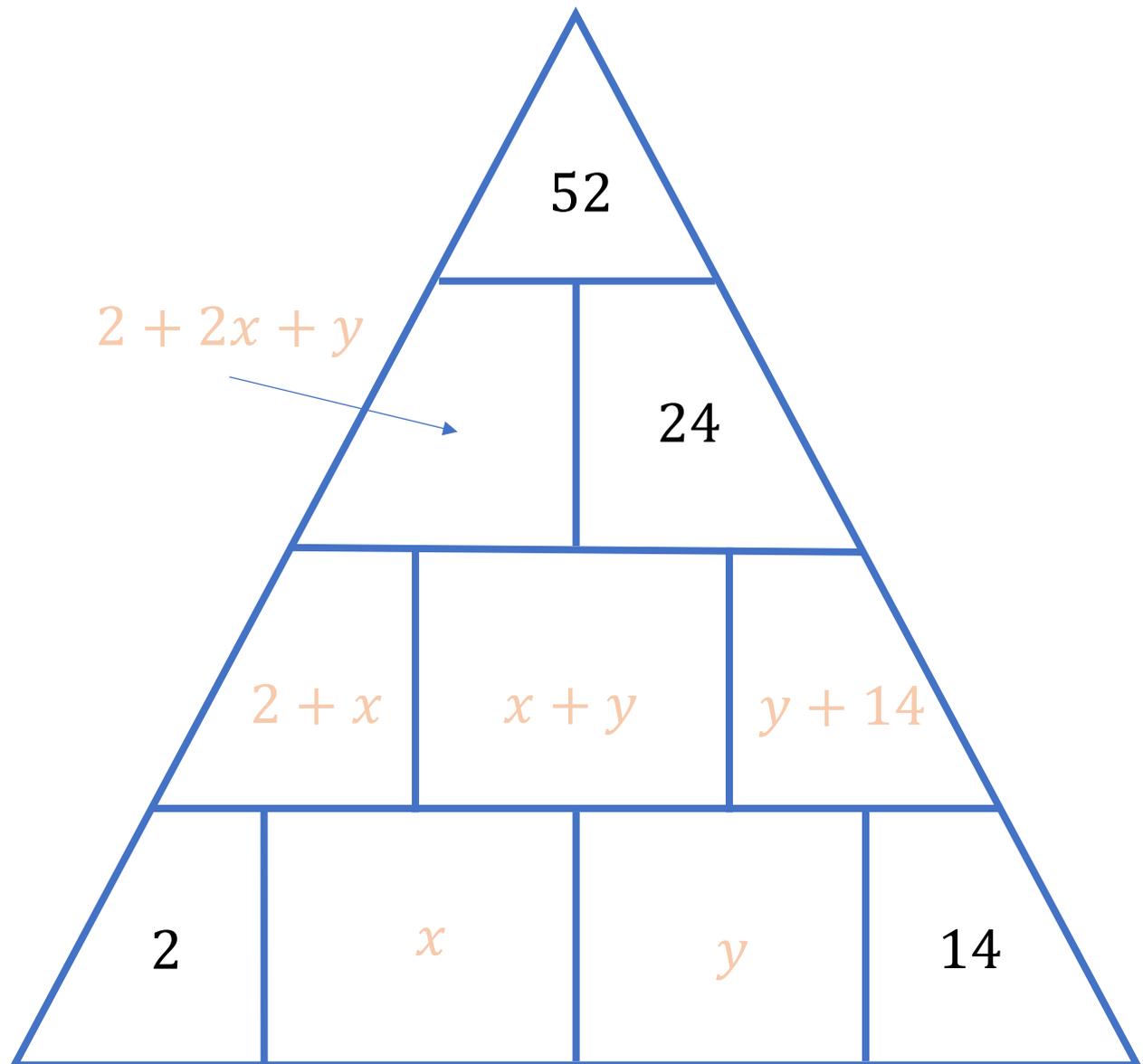
6. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode : pour cycle 3, recherche par tâtonnements et ordres de grandeurs (on peut aussi introduire peu à peu la notion de variable, avec un symbole). Nécessité dans cette énigme de « sortir » du cadre des nombres positifs.

(Série I.)

7. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous.



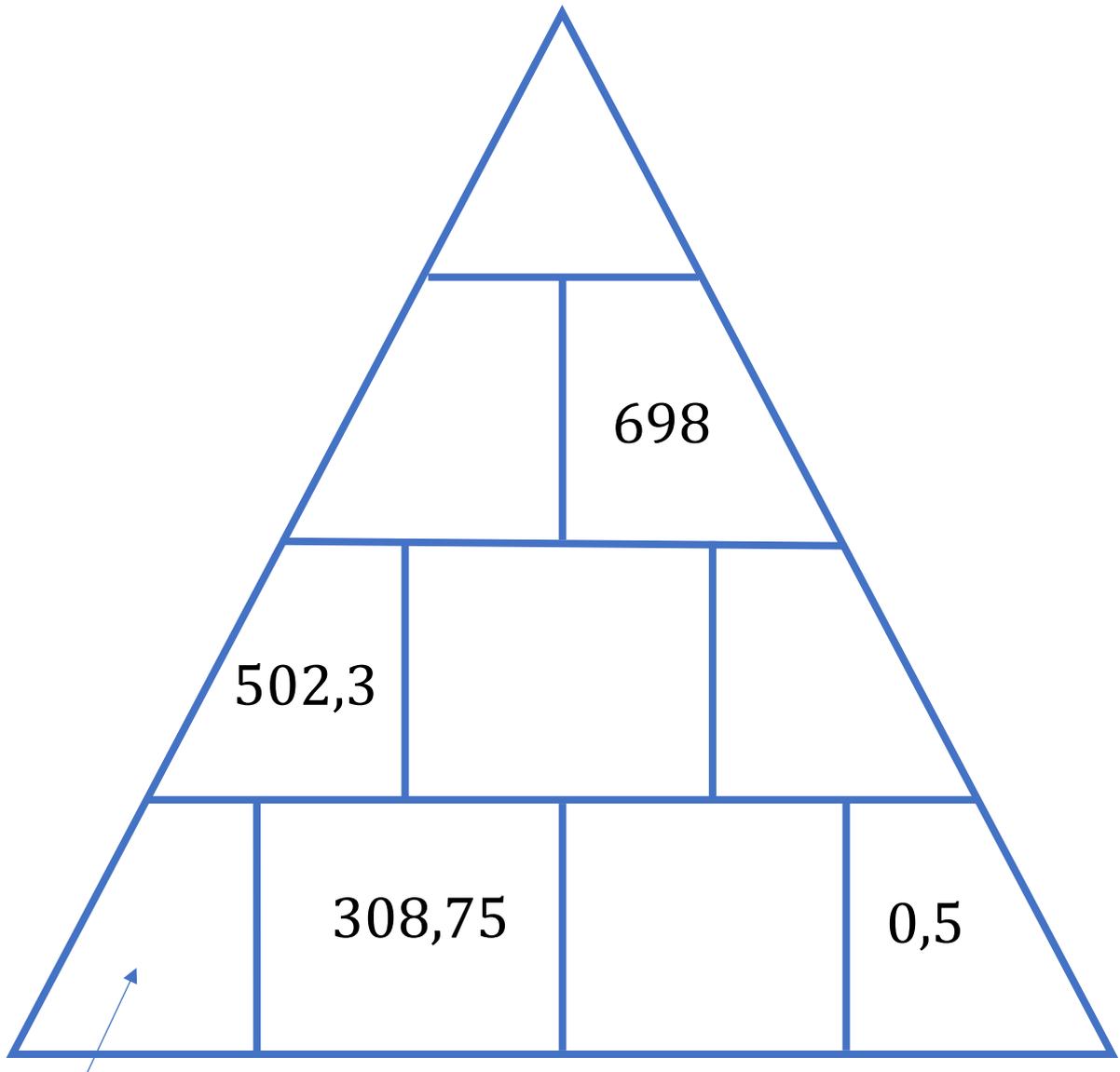
Détail des calculs ou de la méthode : la recherche par tâtonnements se complique... Même au cycle 4 des tâtonnements pourront être mobilisés pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues.

$$2 + 2x + y + 24 = 52$$

$$\text{et } x + 2y + 14 = 24$$

(Série I.)

8. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous.

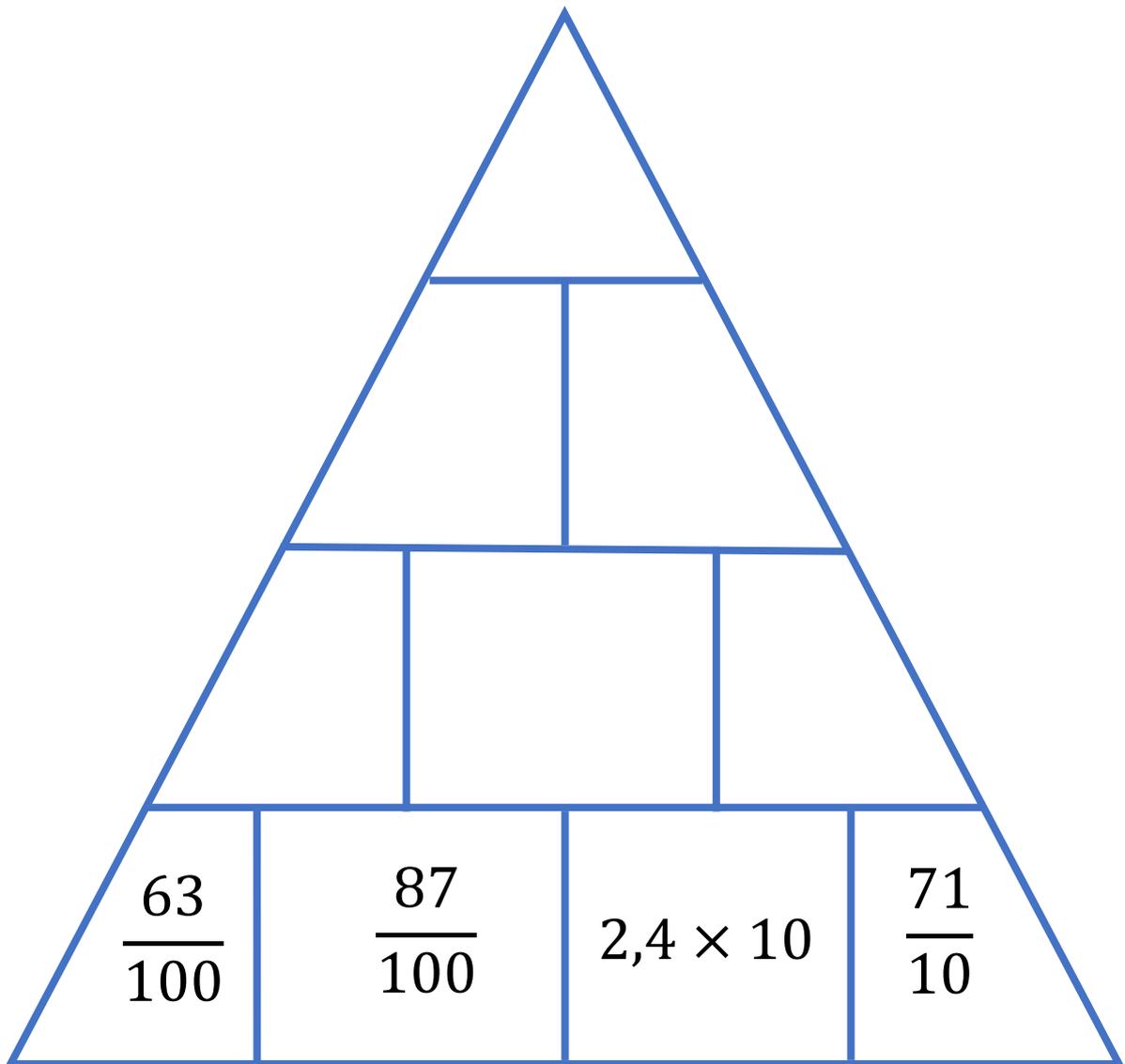


$$542,4 - 308,7$$

Détail des calculs ou de la méthode : en 6^{ème} ou 5^{ème}, par tâtonnements, on fixe une valeur pour la case du milieu de la 3^{ème} ligne (par exemple 500) puis on ajuste avec les résultats des cases de la 3^{ème} et de la 4^{ème} ligne... Un travail sur les ordres de grandeurs est alors utile. Après la 4^{ème}, on utilise le calcul littéral et une équation en désignant par une variable la troisième case de la dernière ligne.

(Série I.)

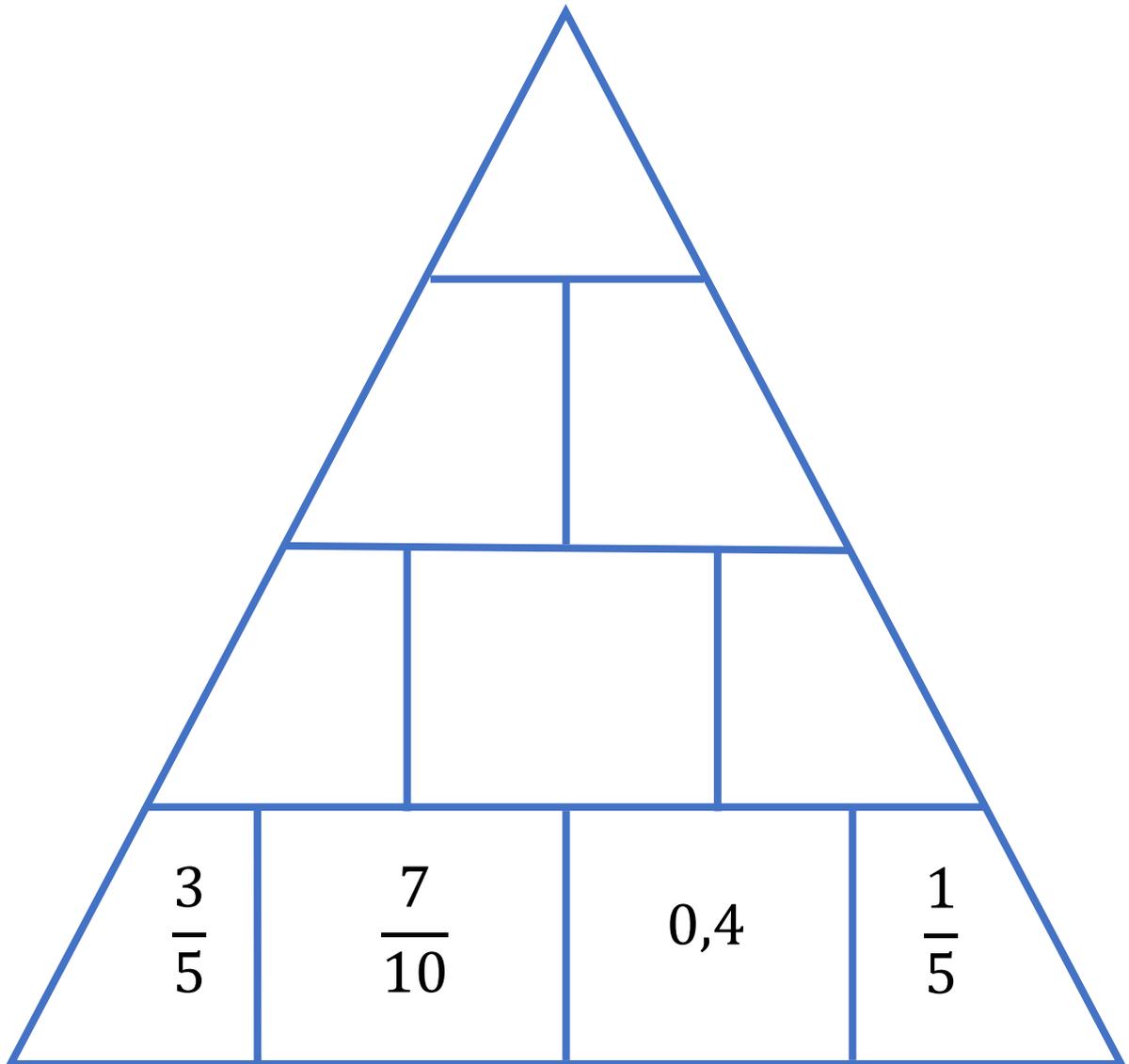
9. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série I.)

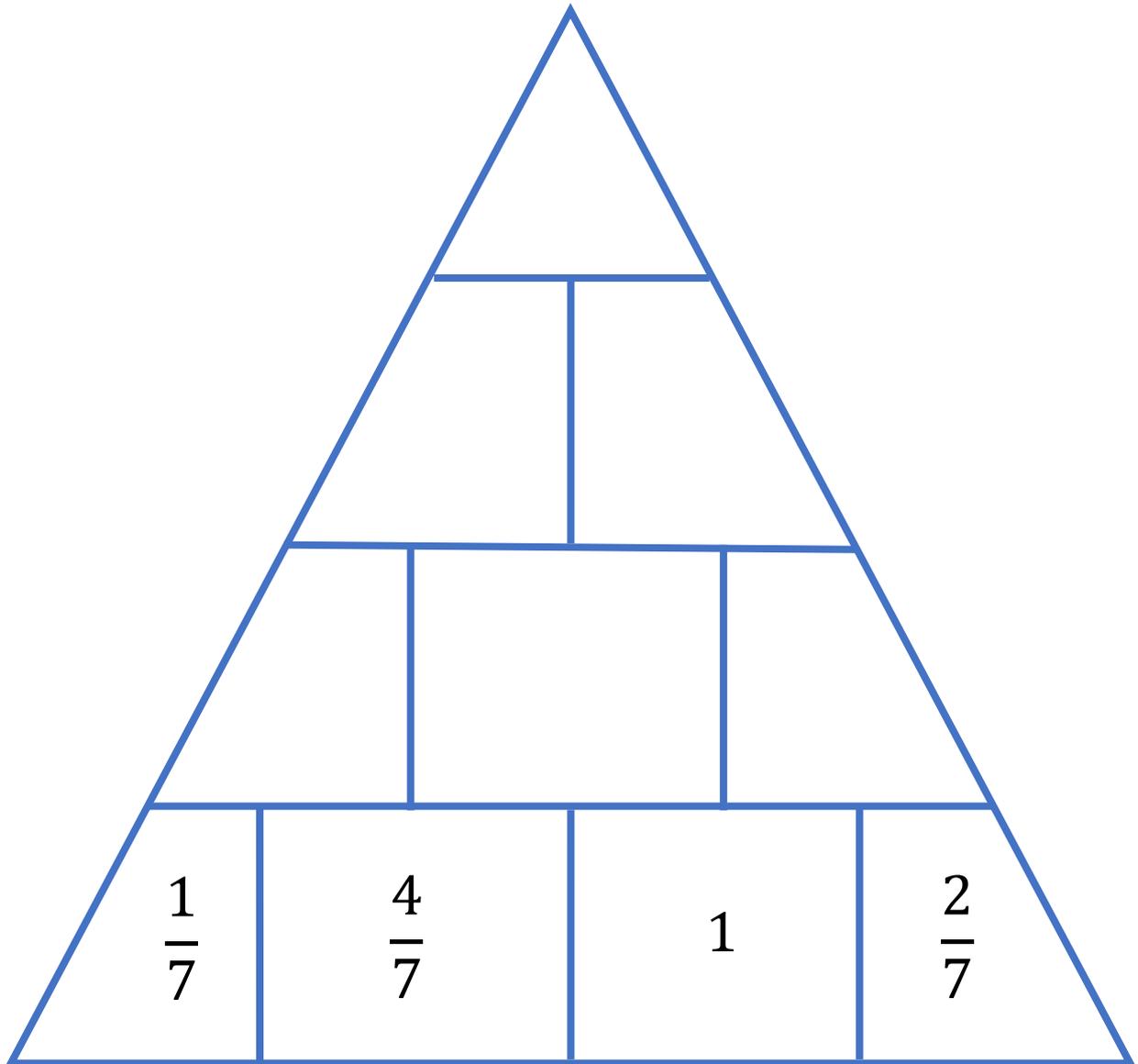
10. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série I.)

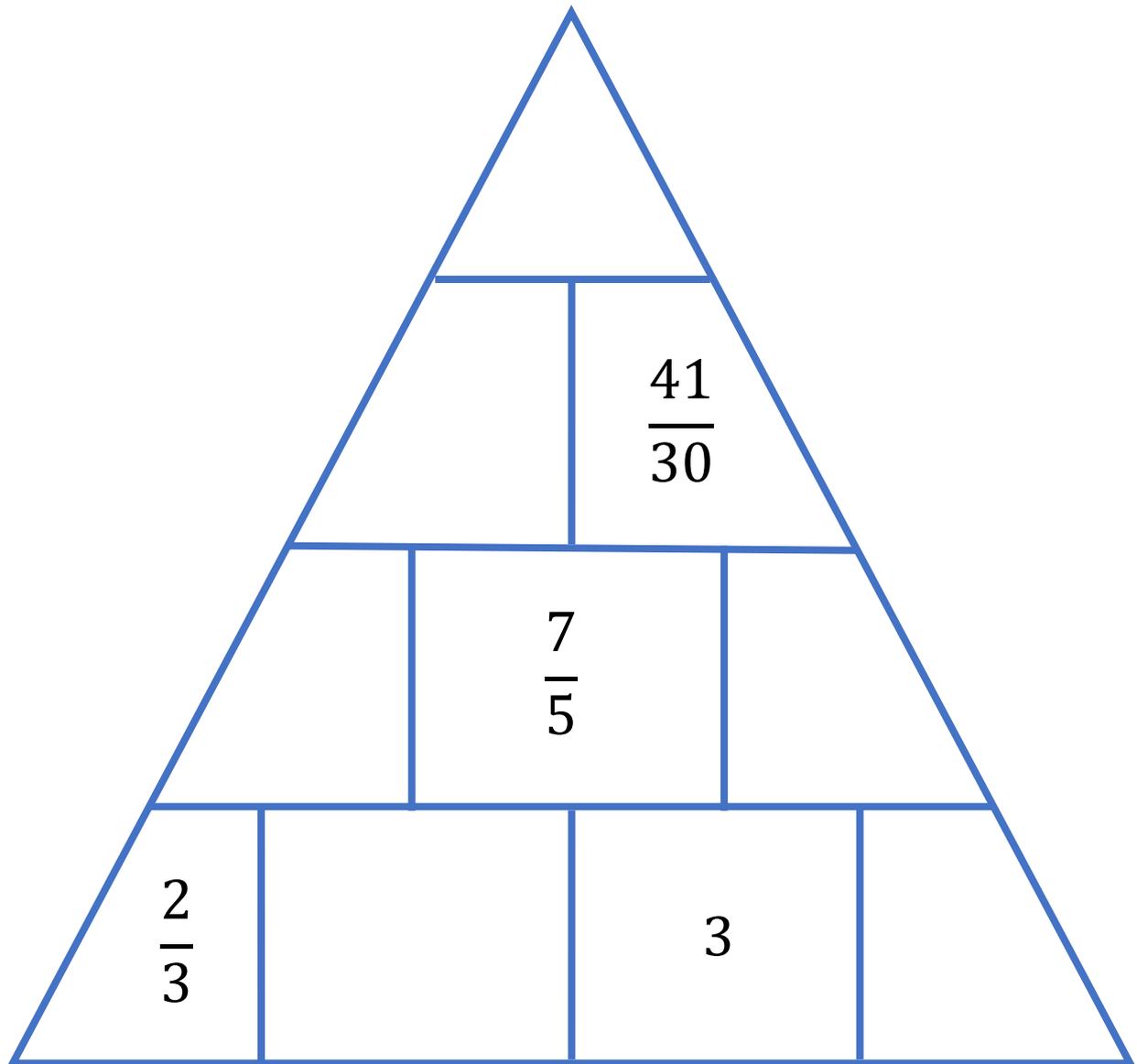
11. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série I.)

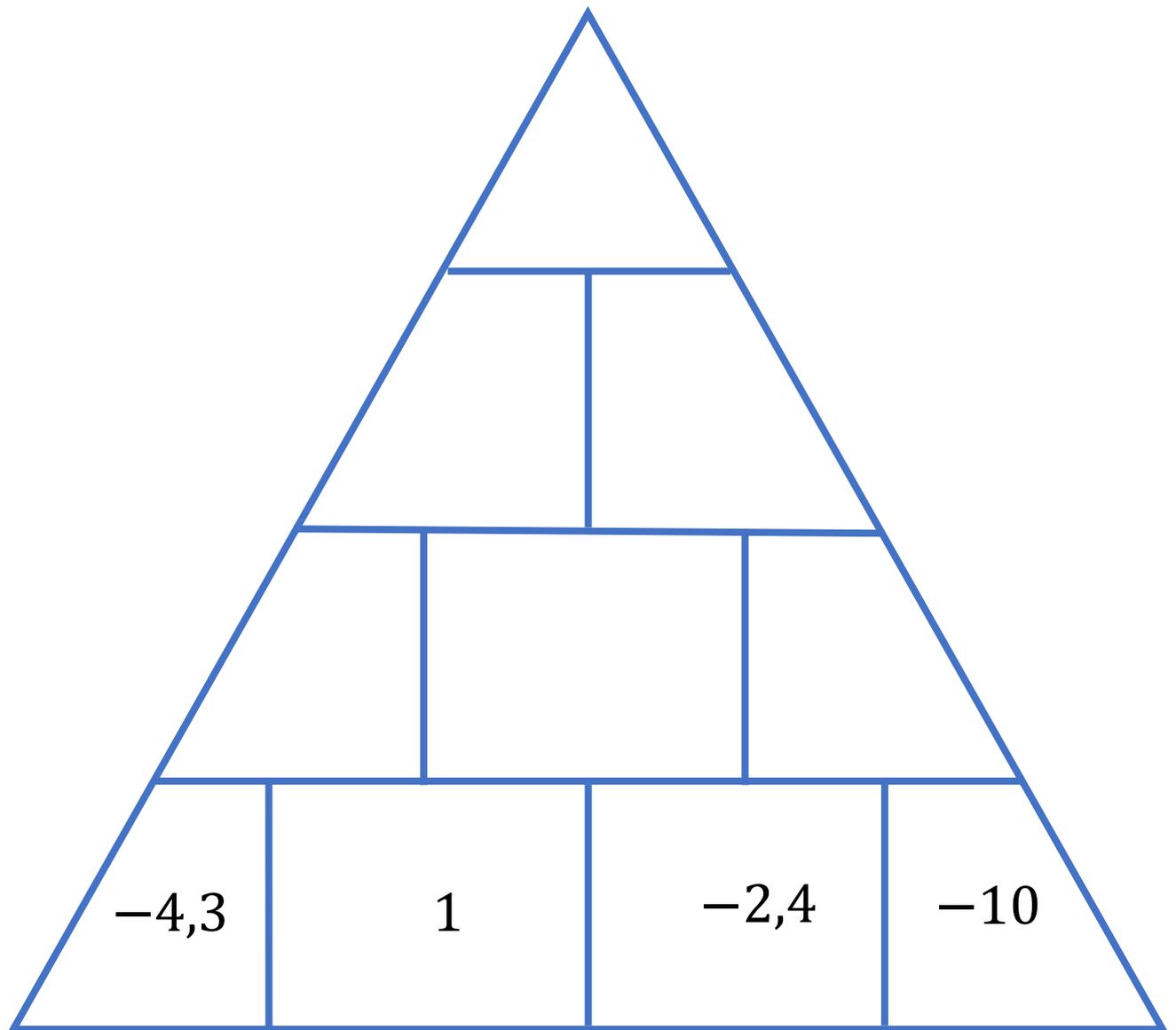
12. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série I.)

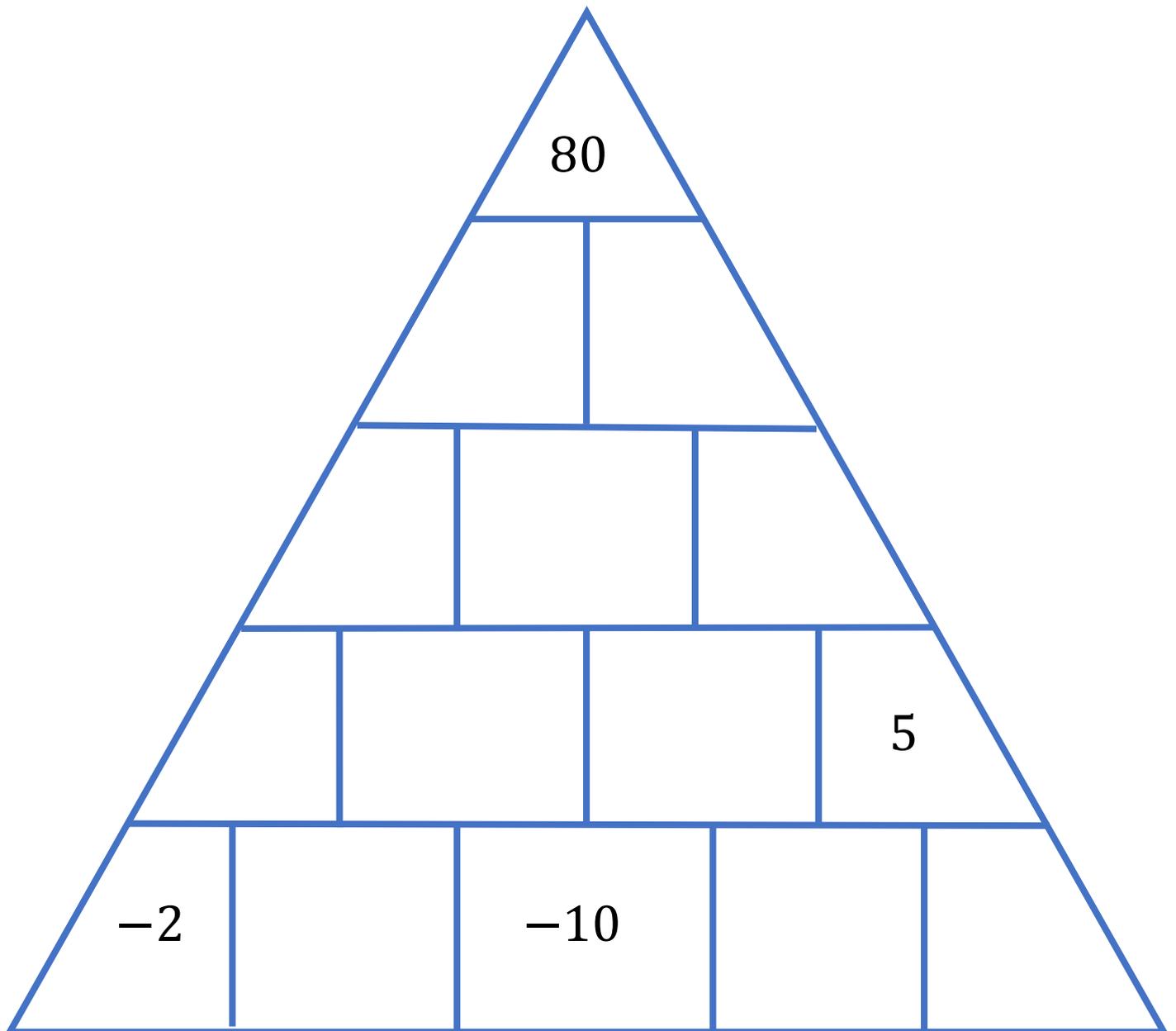
13. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série I.)

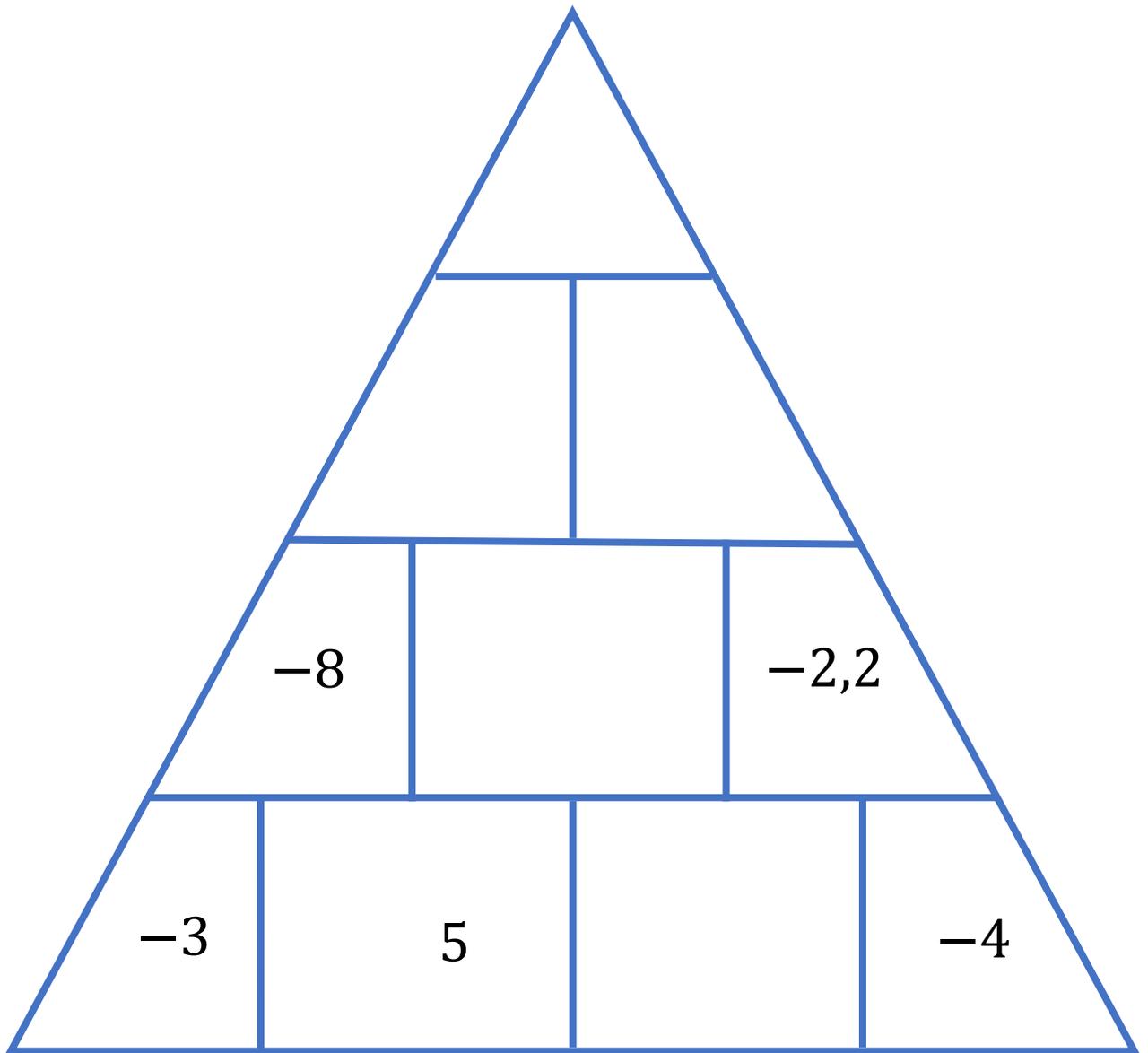
14. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série I.)

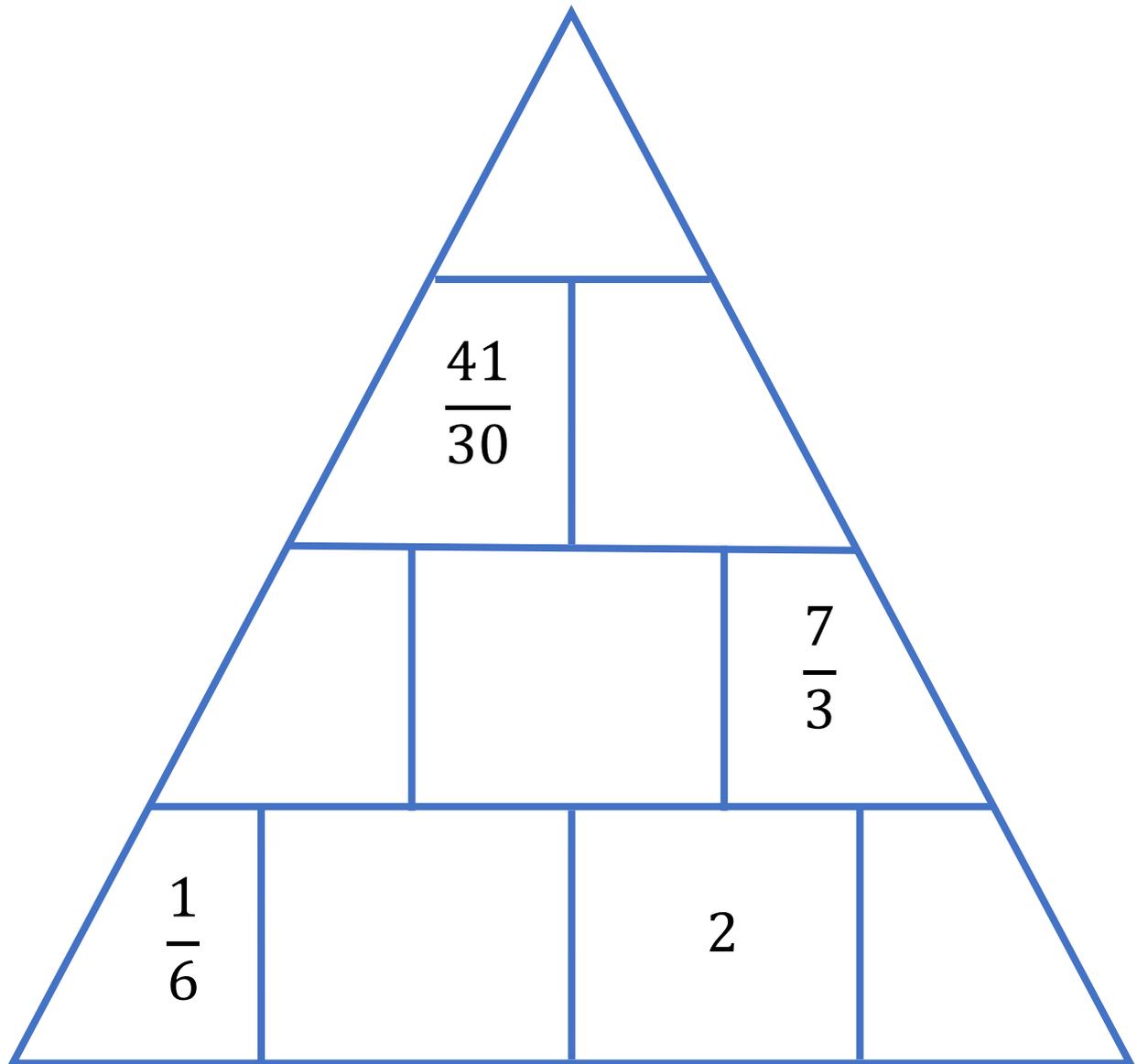
15. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la différence entre les cases situées juste en-dessous (celle de gauche « moins » celle de droite).



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série I.)

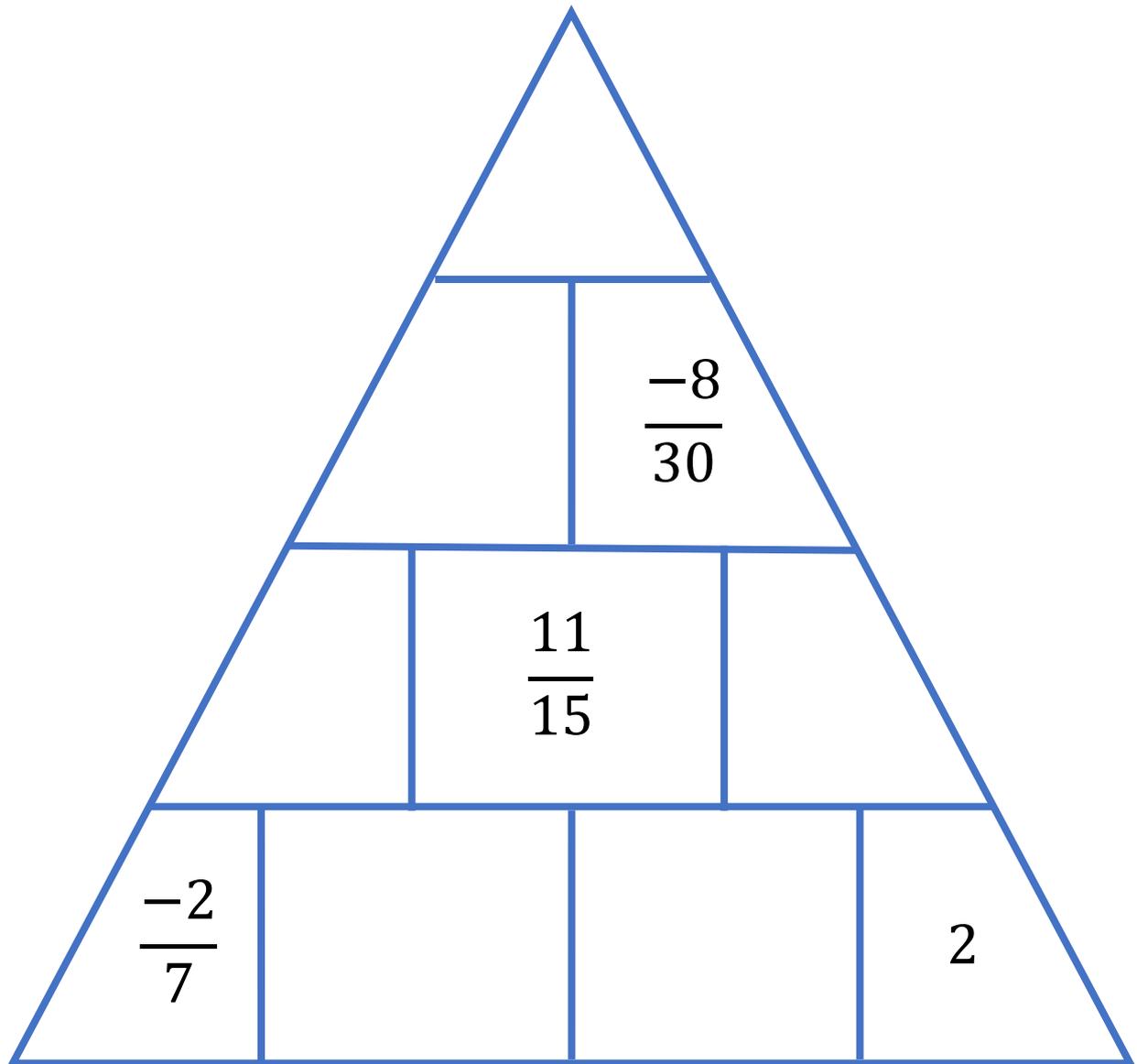
16. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série I.)

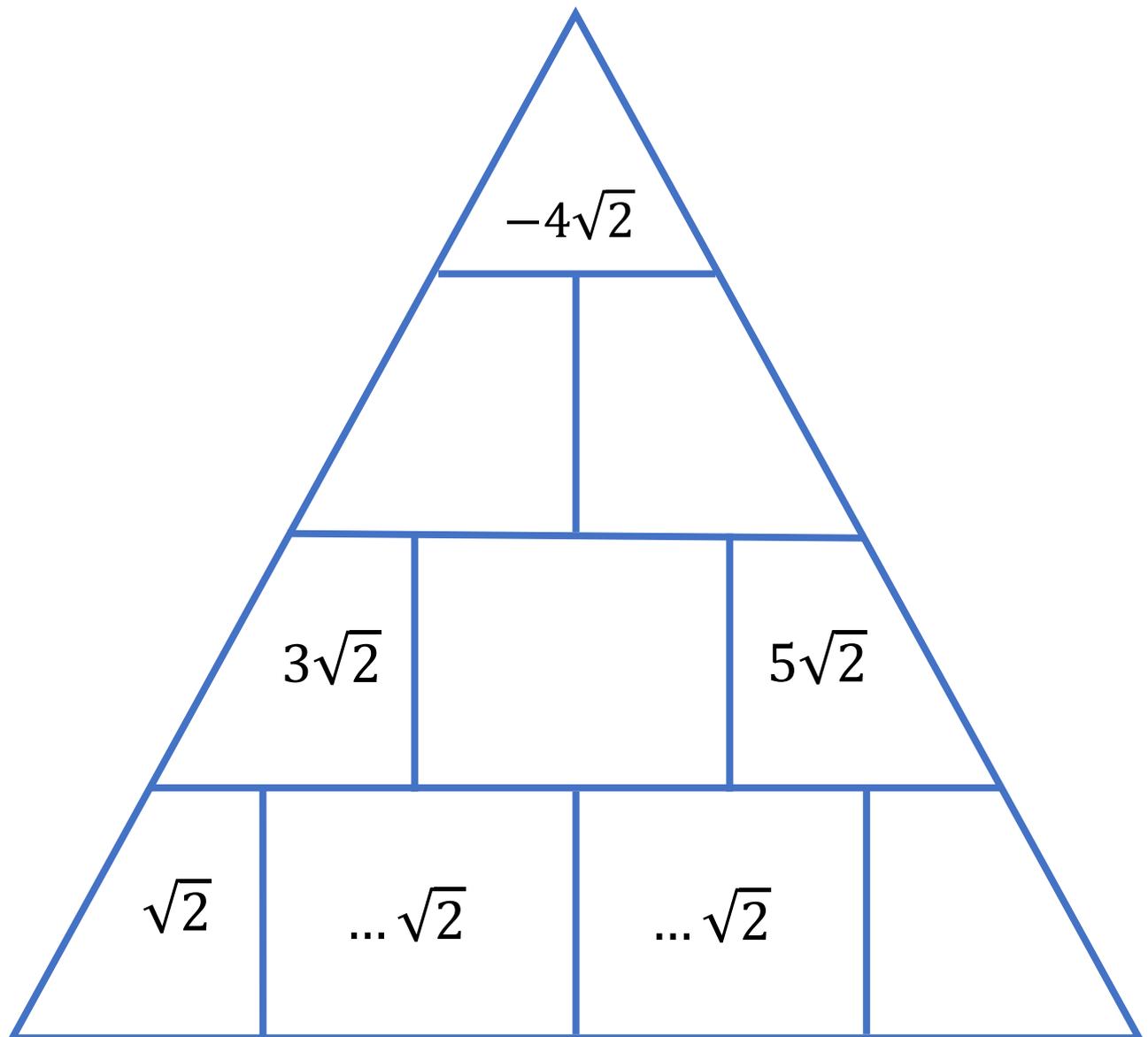
17. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série I.)

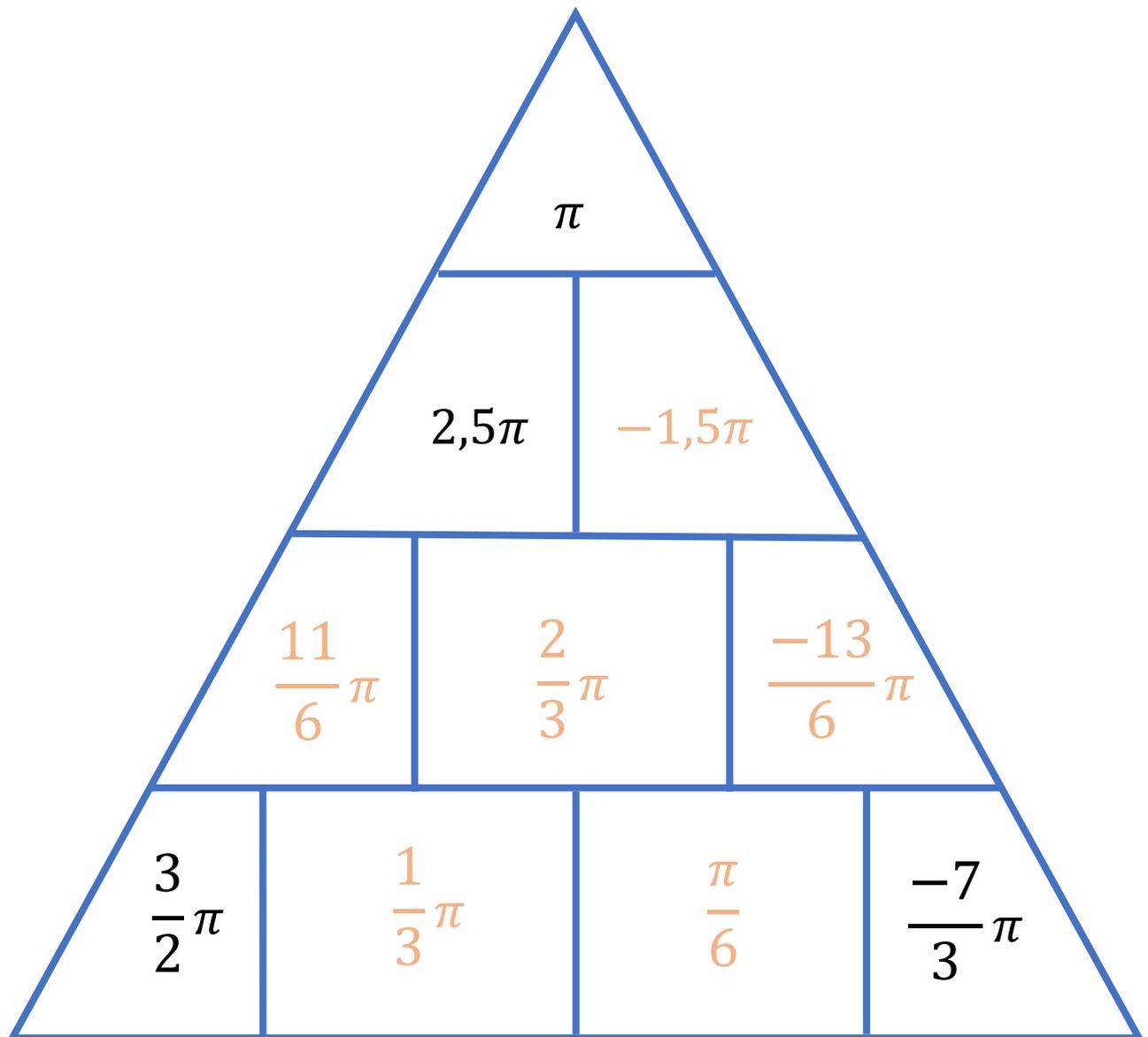
18. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série I.)

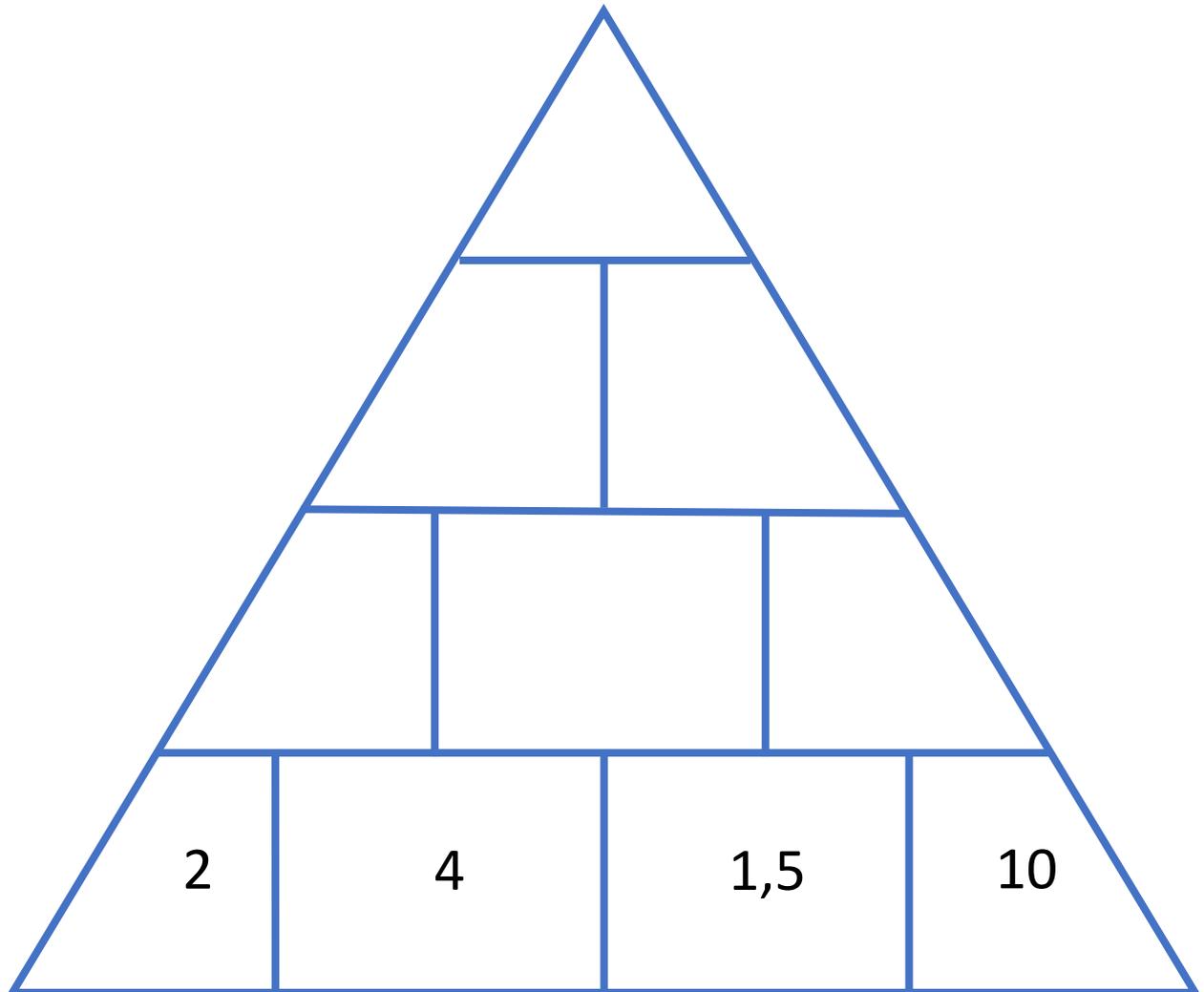
19. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

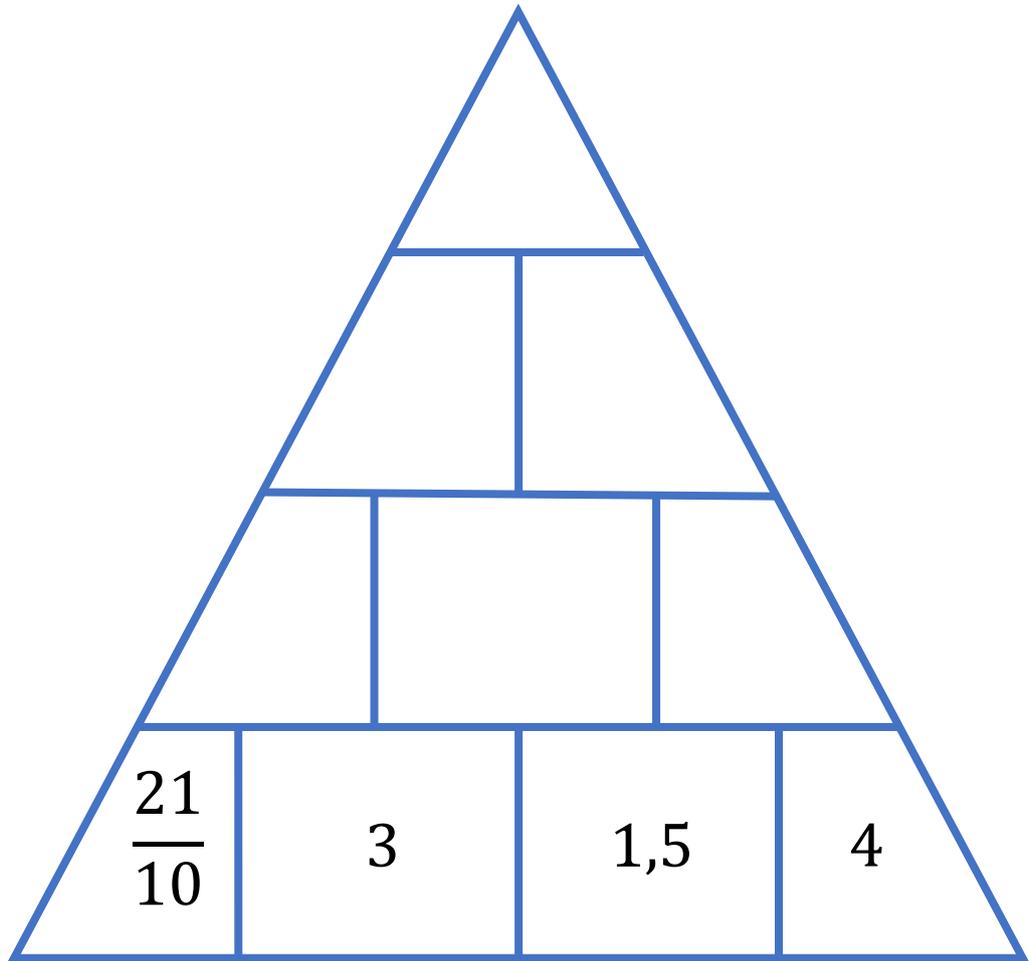
SÉRIE II – PRODUITS

1. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale au produit des cases situées juste en-dessous.



(Série II.)

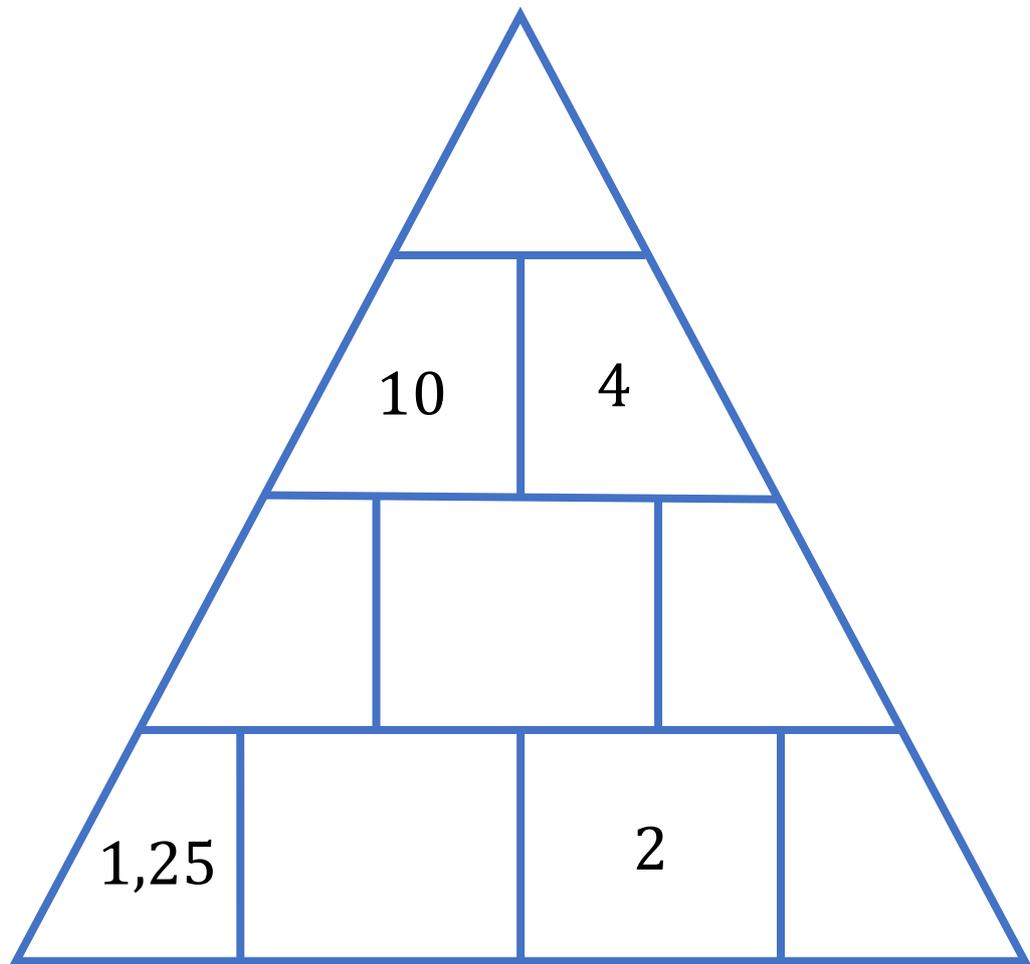
2. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale au produit des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série II.)

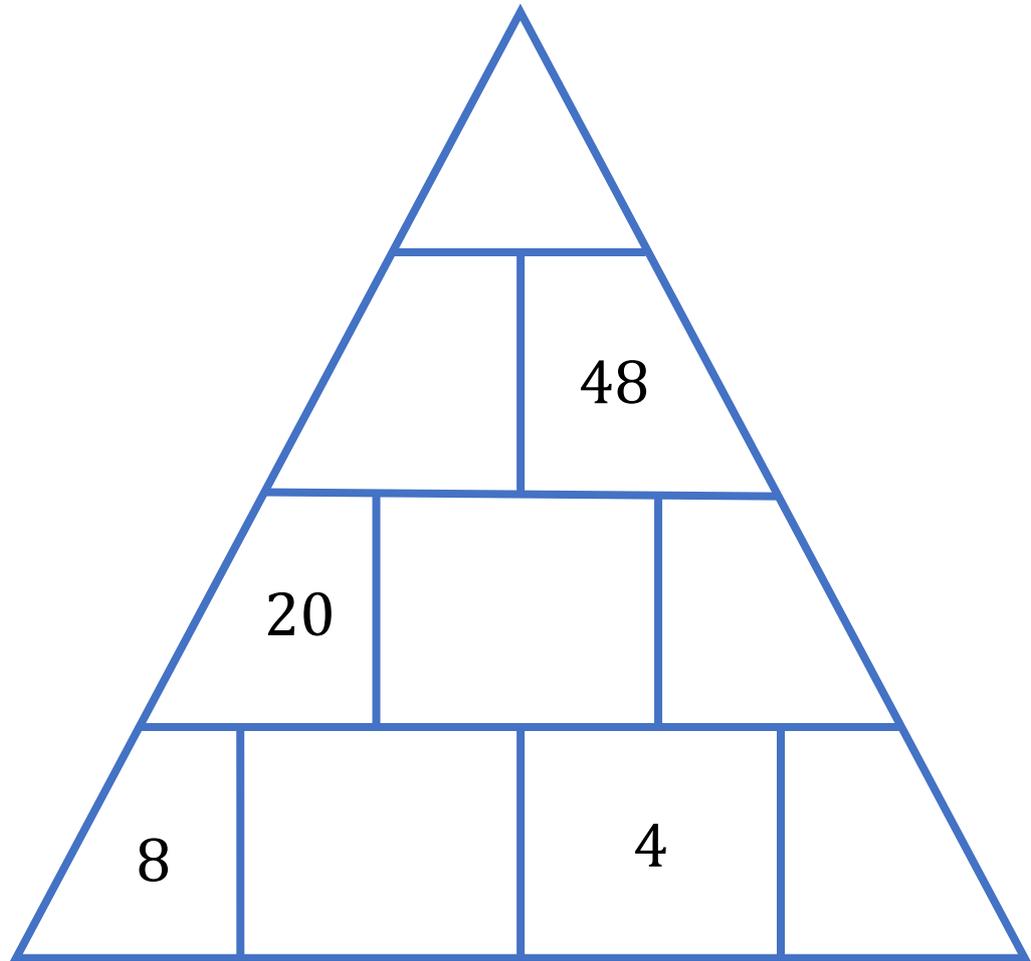
3. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale au produit des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série II.)

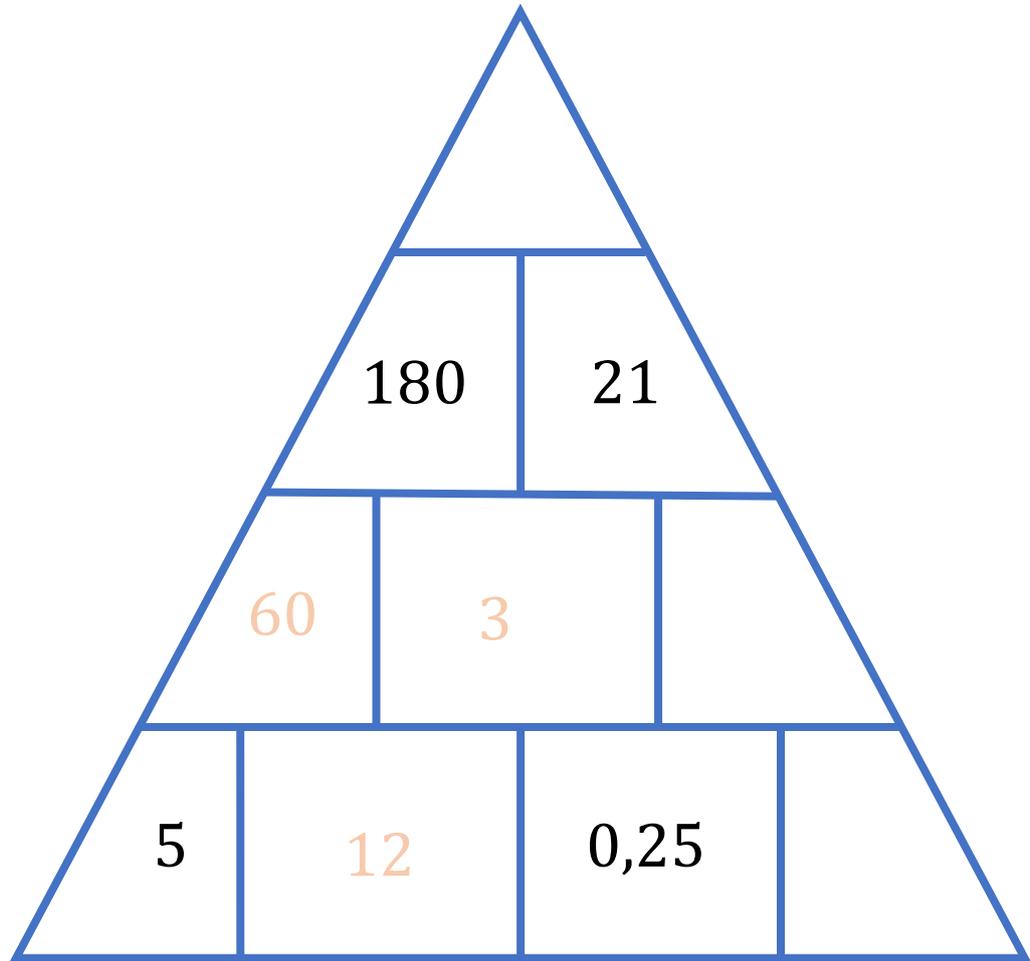
4. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale au produit des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série II.)

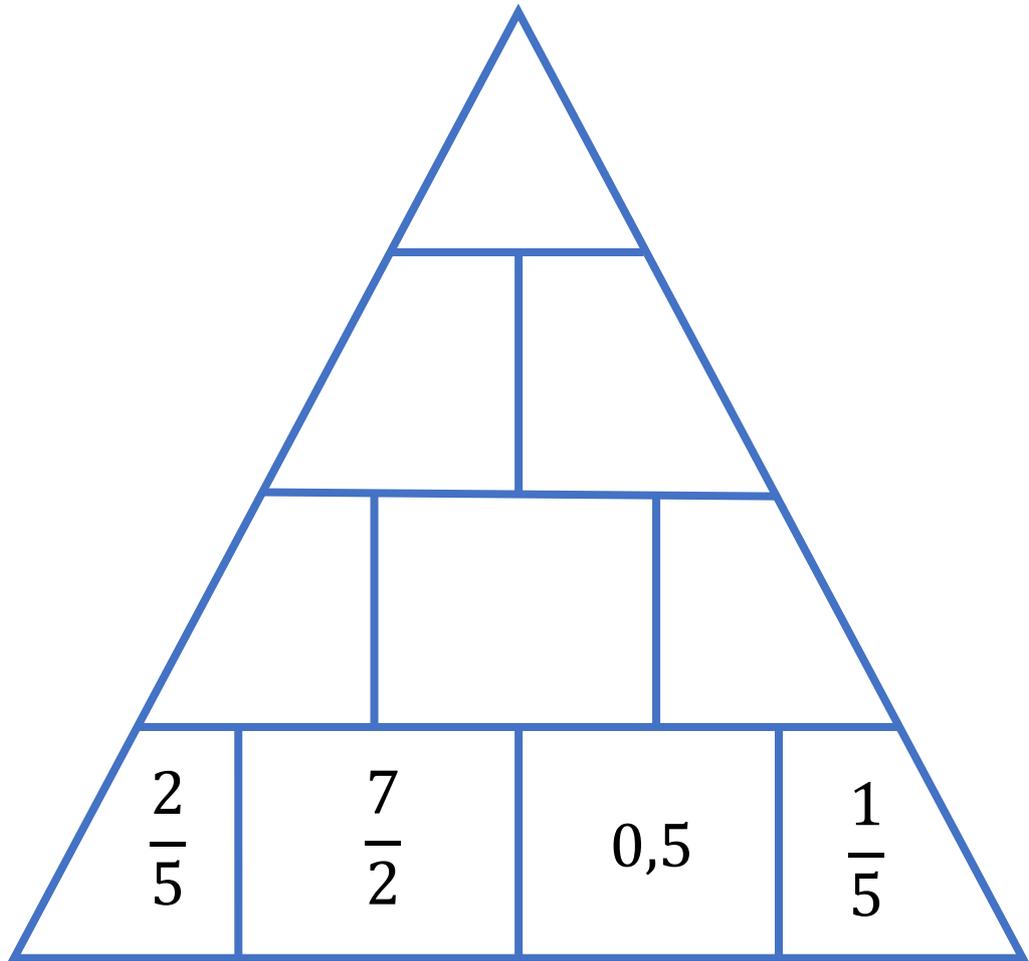
5. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale au produit des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série II.)

6. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale au produit des cases situées juste en-dessous.

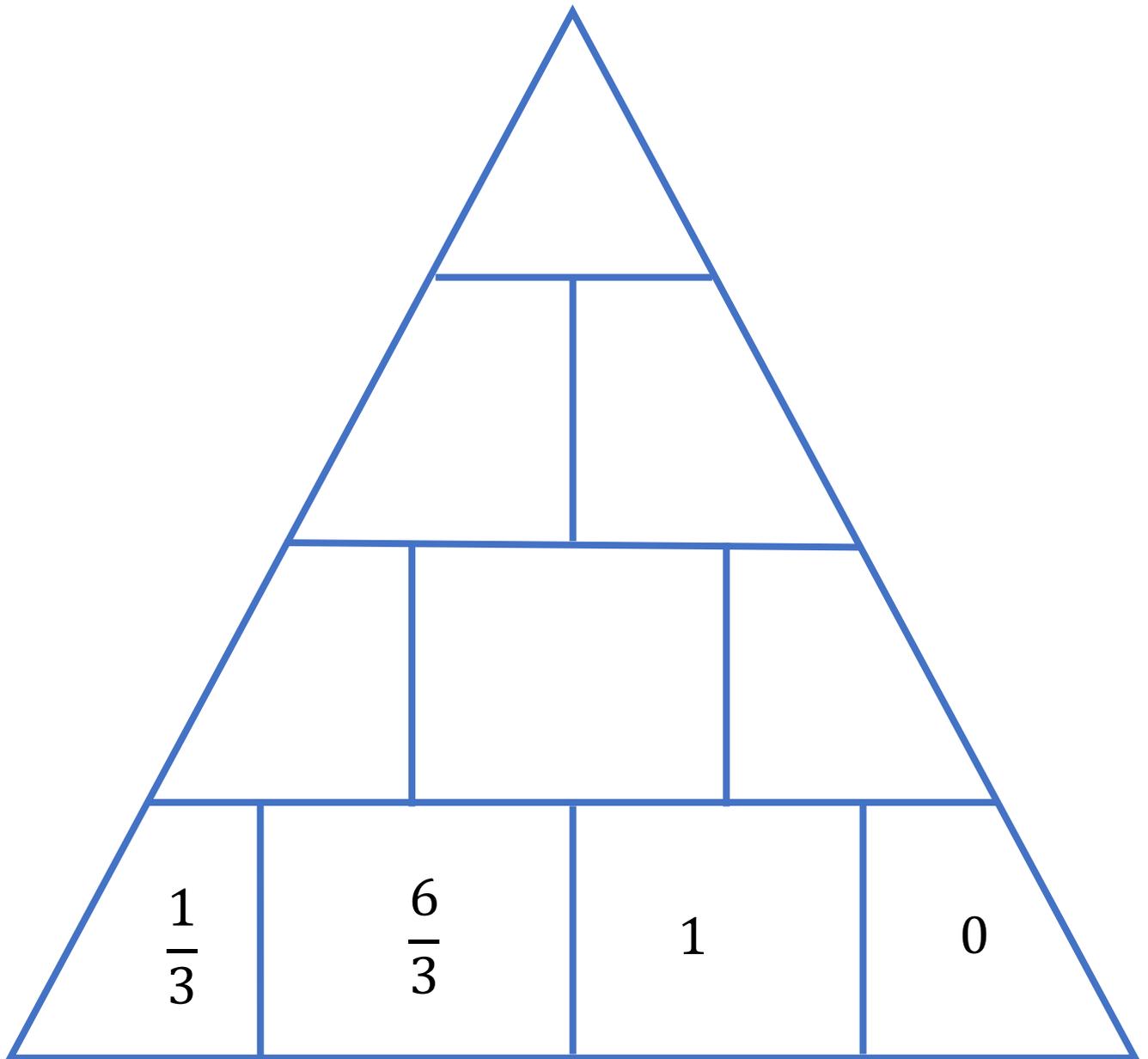


Détail des calculs ou de la méthode :

transformer 0,5 en $\frac{1}{2}$ (puis n'utiliser que des fractions) ou tout écrire sous forme décimale.

(Série II.)

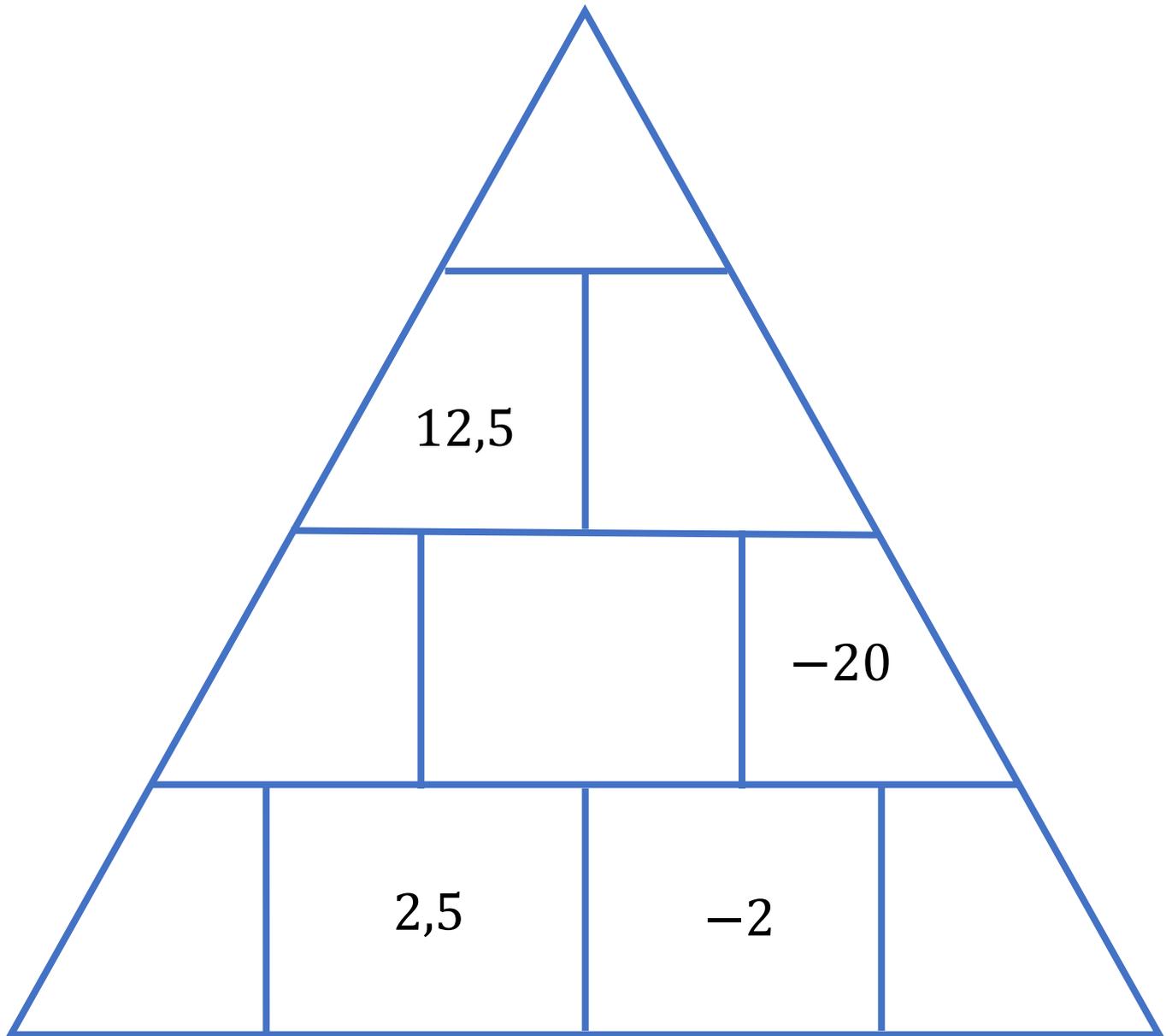
7. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale au produit des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série II.)

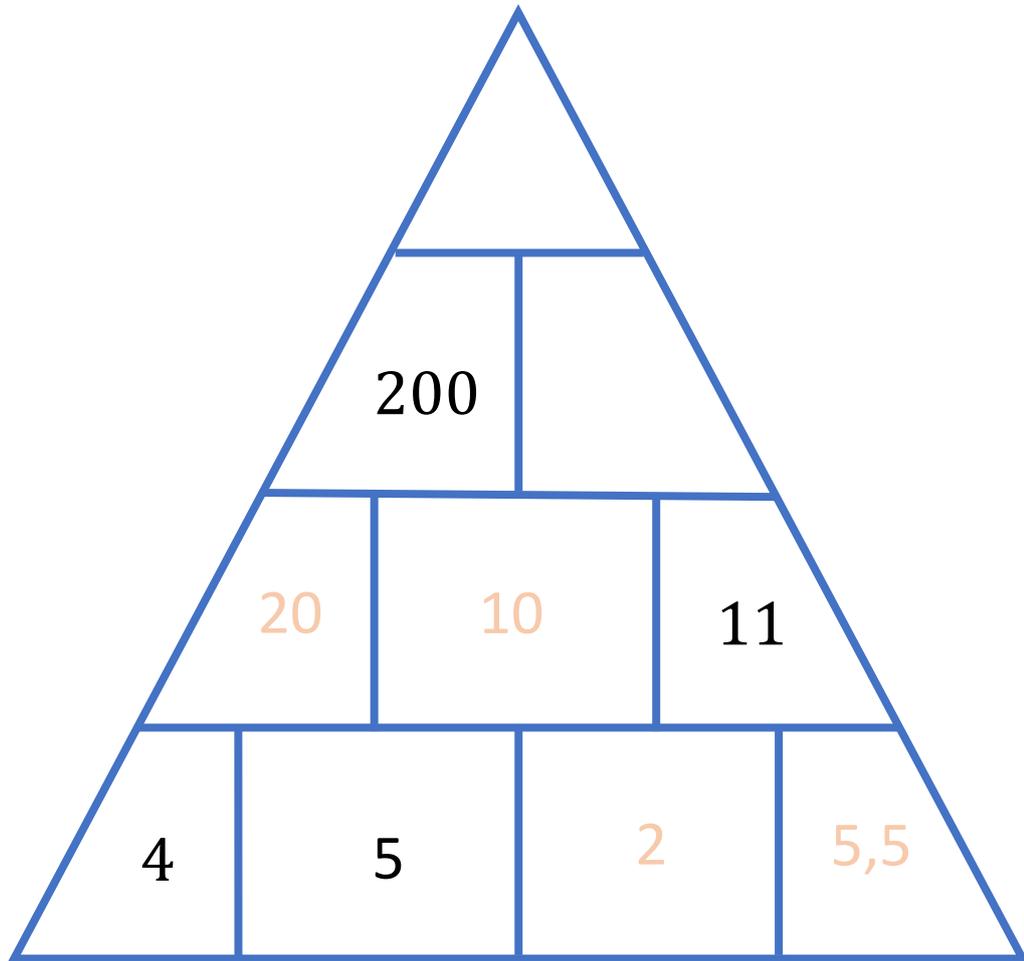
8. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale au produit des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série II.)

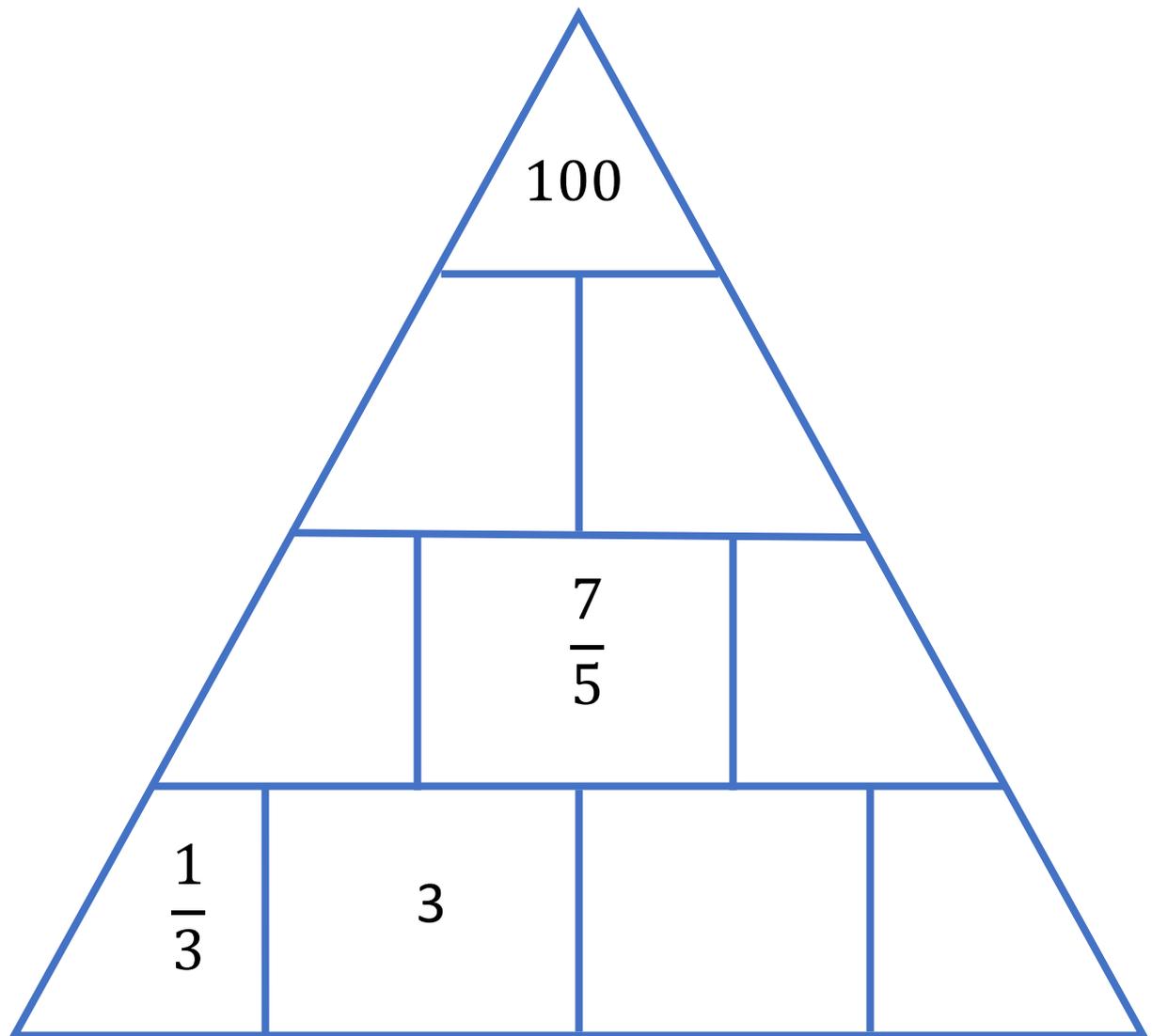
9. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale au produit des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série II.)

10. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale au produit des cases situées juste en-dessous.

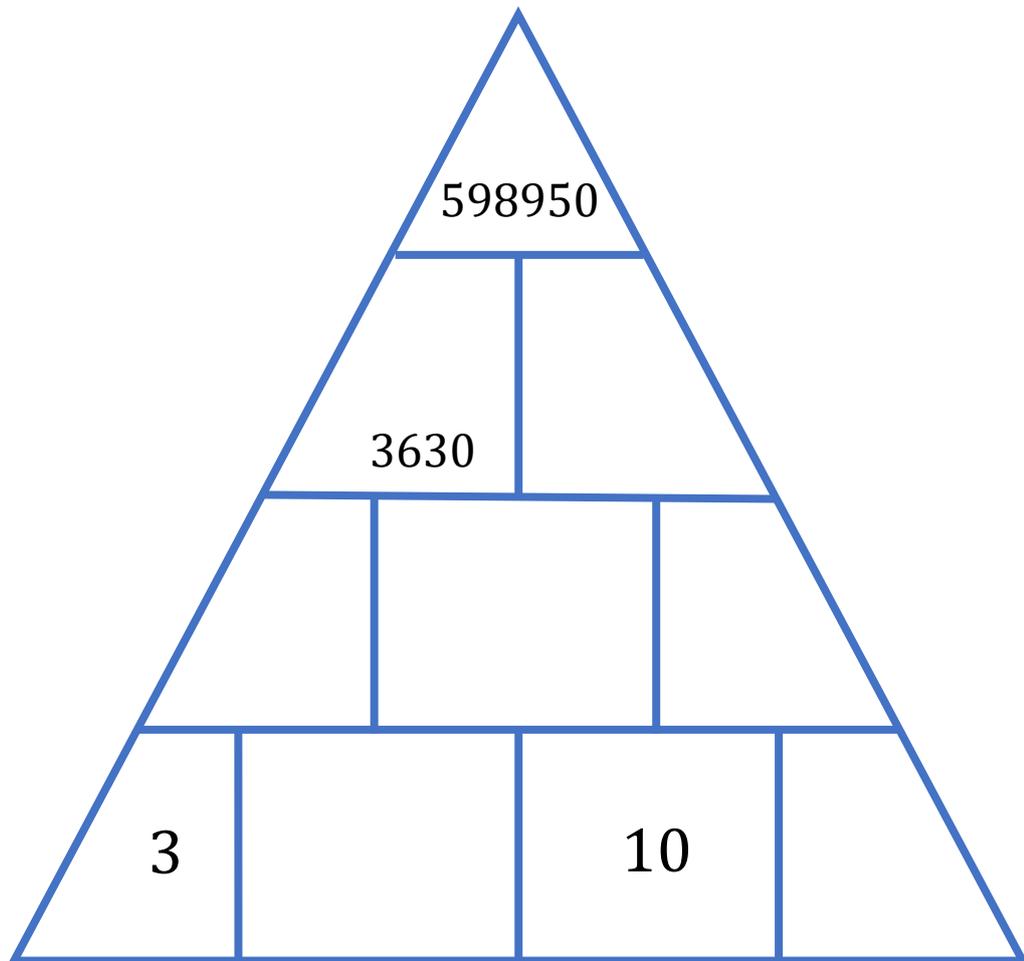


Détail des calculs ou de la méthode :

utilisation de quotients de fractions.

(Série II.)

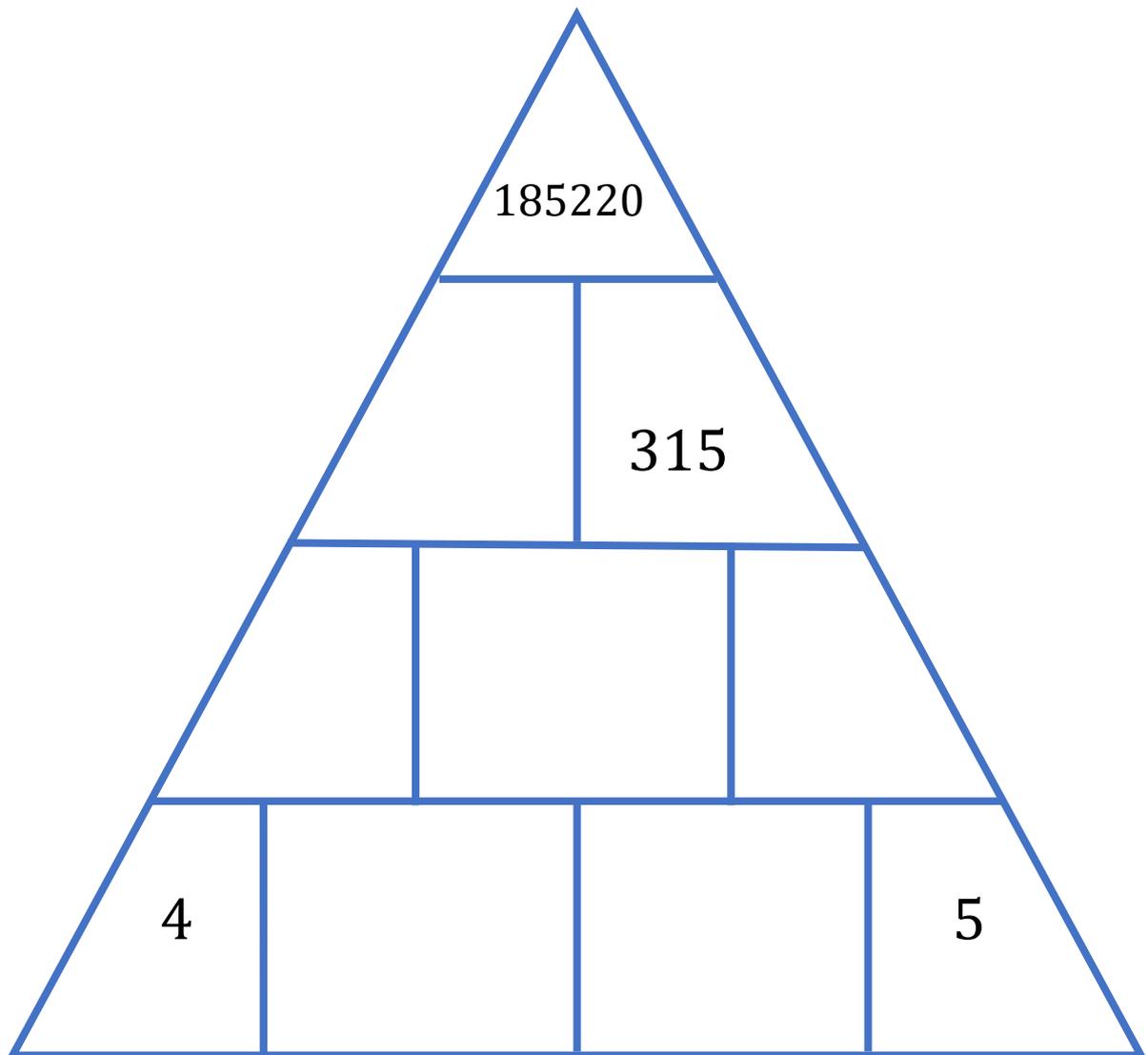
11. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale au produit des cases situées juste en-dessous et que tous les nombres sont entiers.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série II.)

12. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale au produit des cases situées juste en-dessous et que tous les nombres sont entiers.

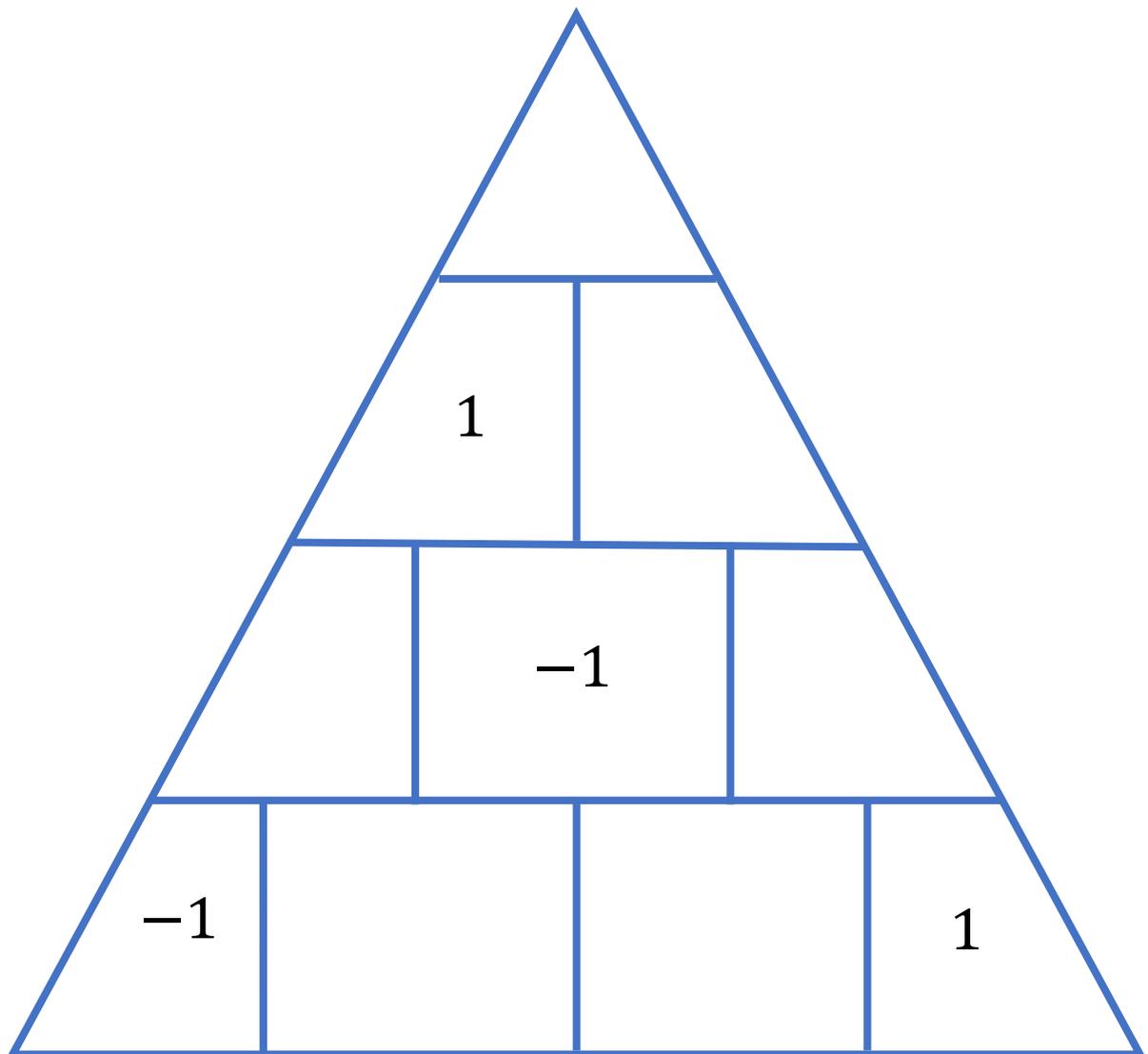


Détail des calculs ou de la méthode :

le recours à la décomposition en facteurs premiers peut être utile.

(Série II.)

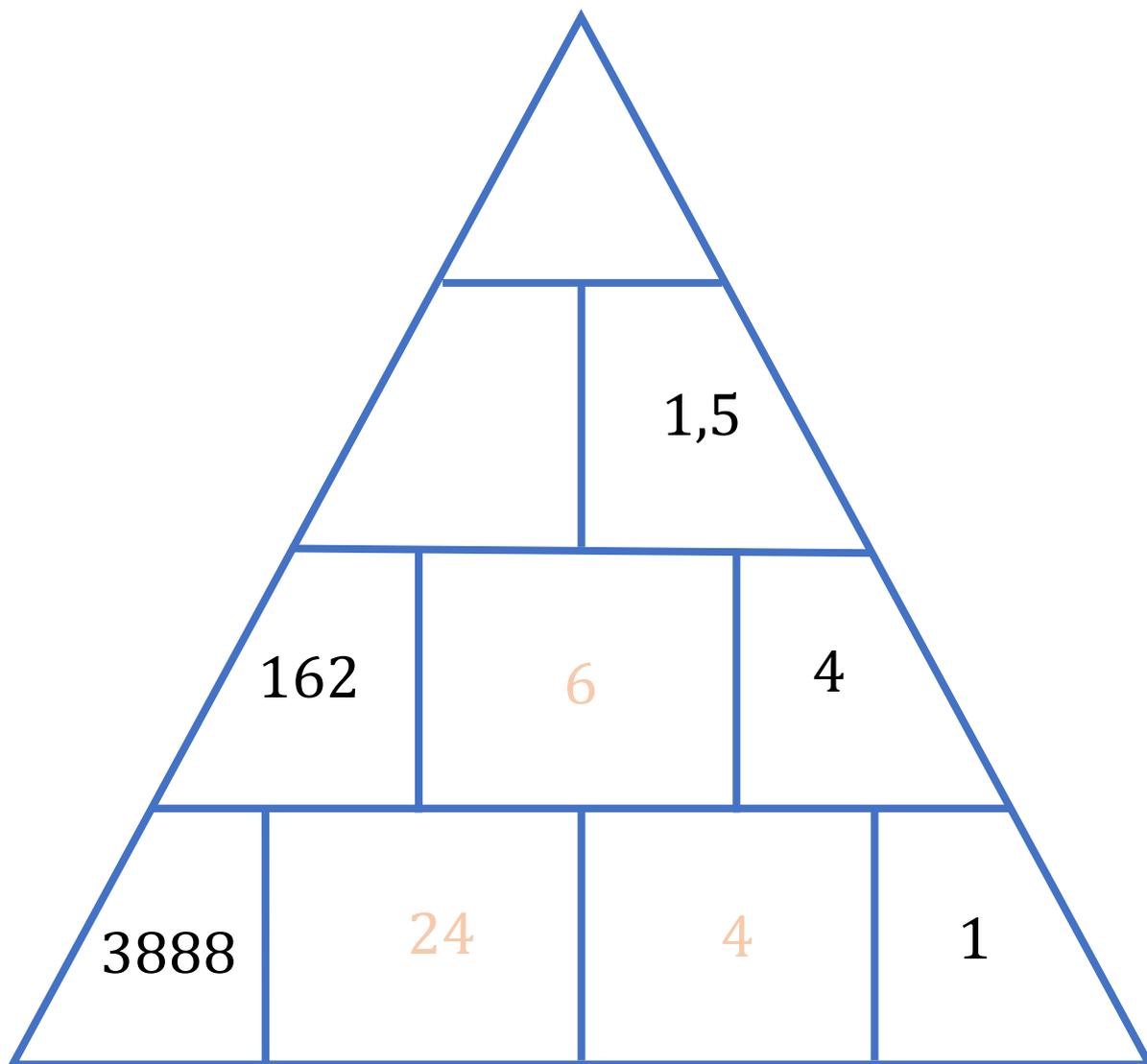
13. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale au produit des cases situées juste en-dessous et que tous les nombres sont entiers.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série II.)

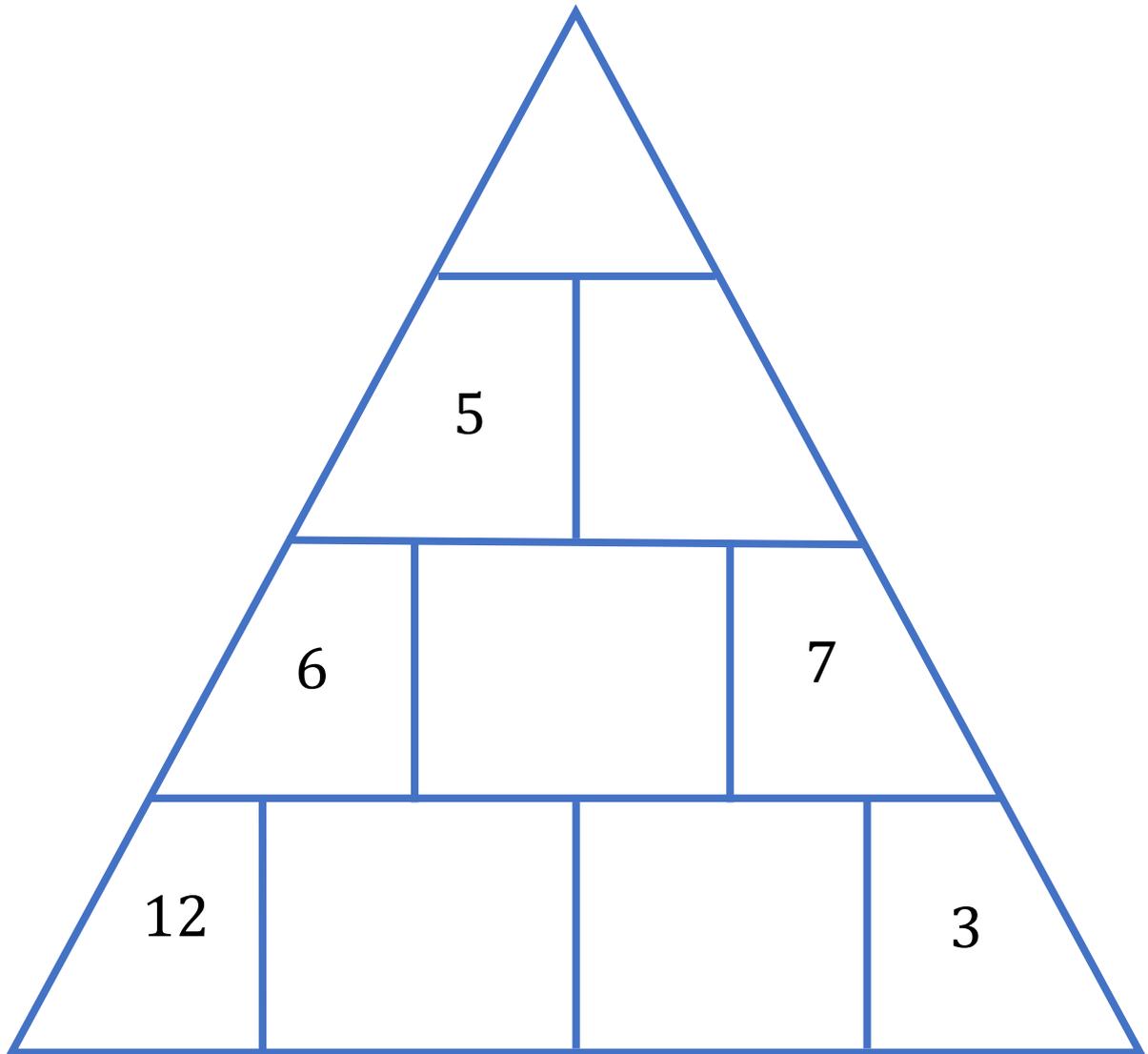
14. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale au quotient des cases situées juste en-dessous (celle de gauche divisée par celle de droite).



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série II.)

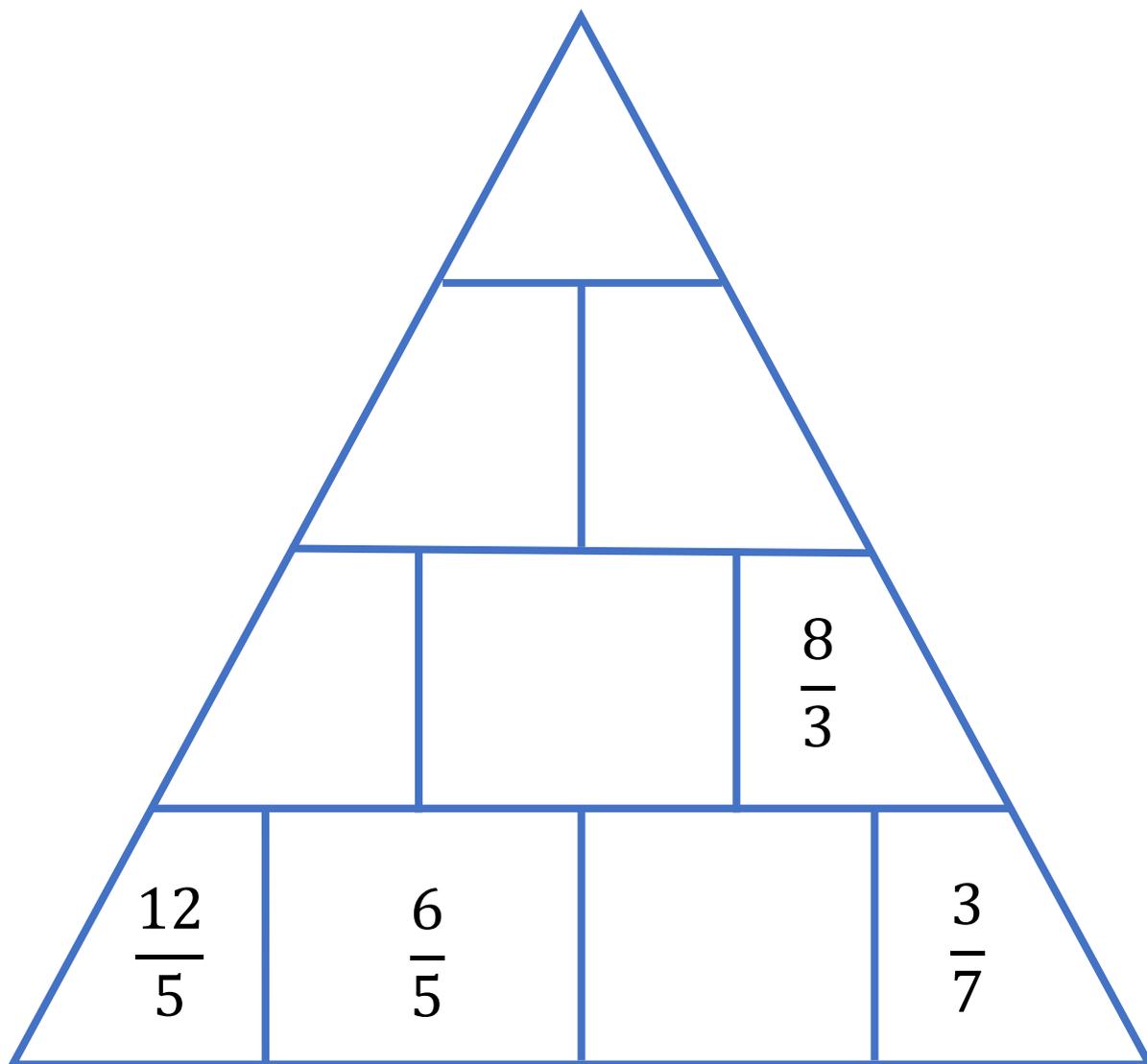
15. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale au quotient des cases situées juste en-dessous (celle de gauche divisée par celle de droite).



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série II.)

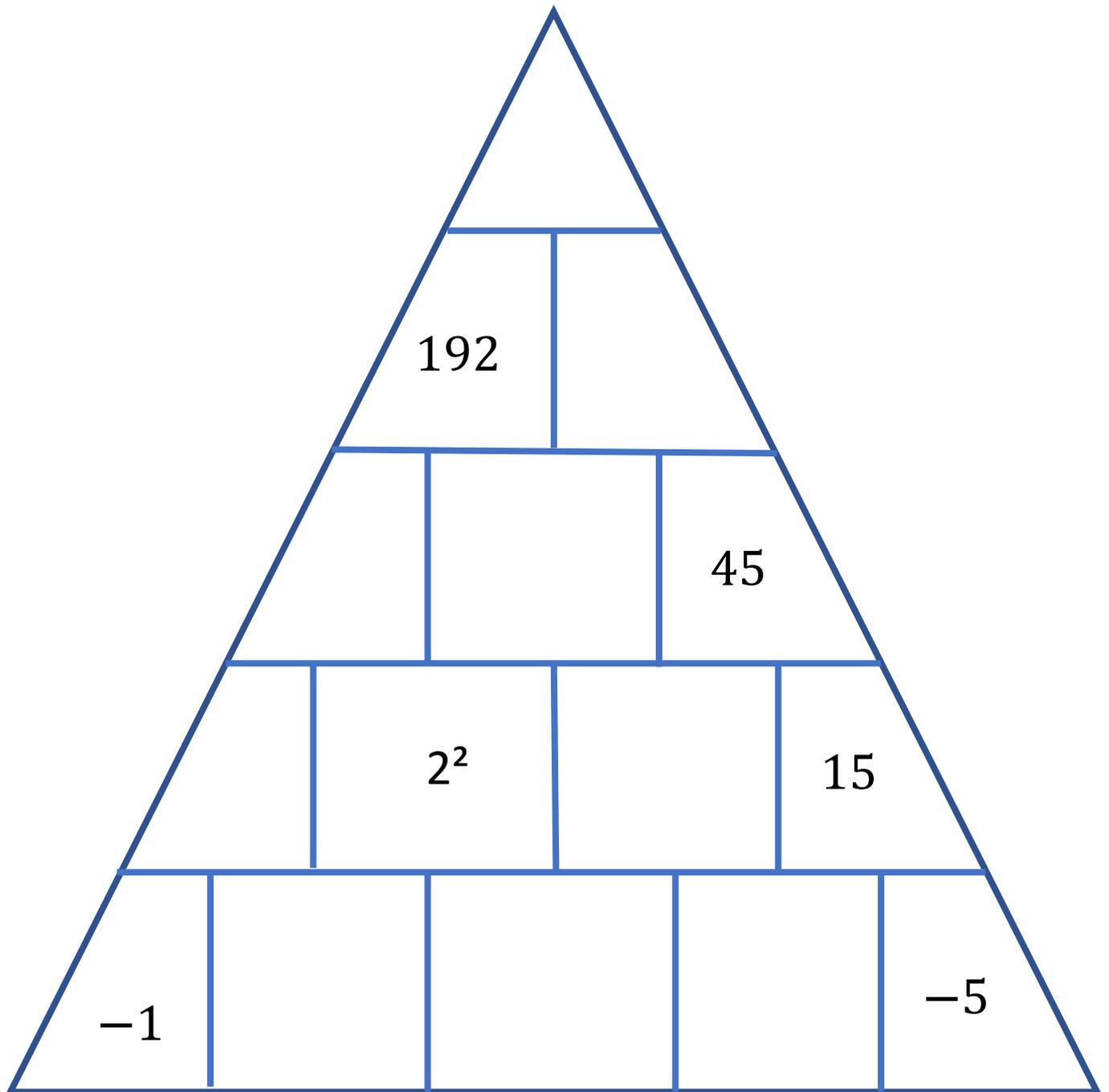
16. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale au quotient des cases situées juste en-dessous (celle de gauche divisée par celle de droite).



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série II.)

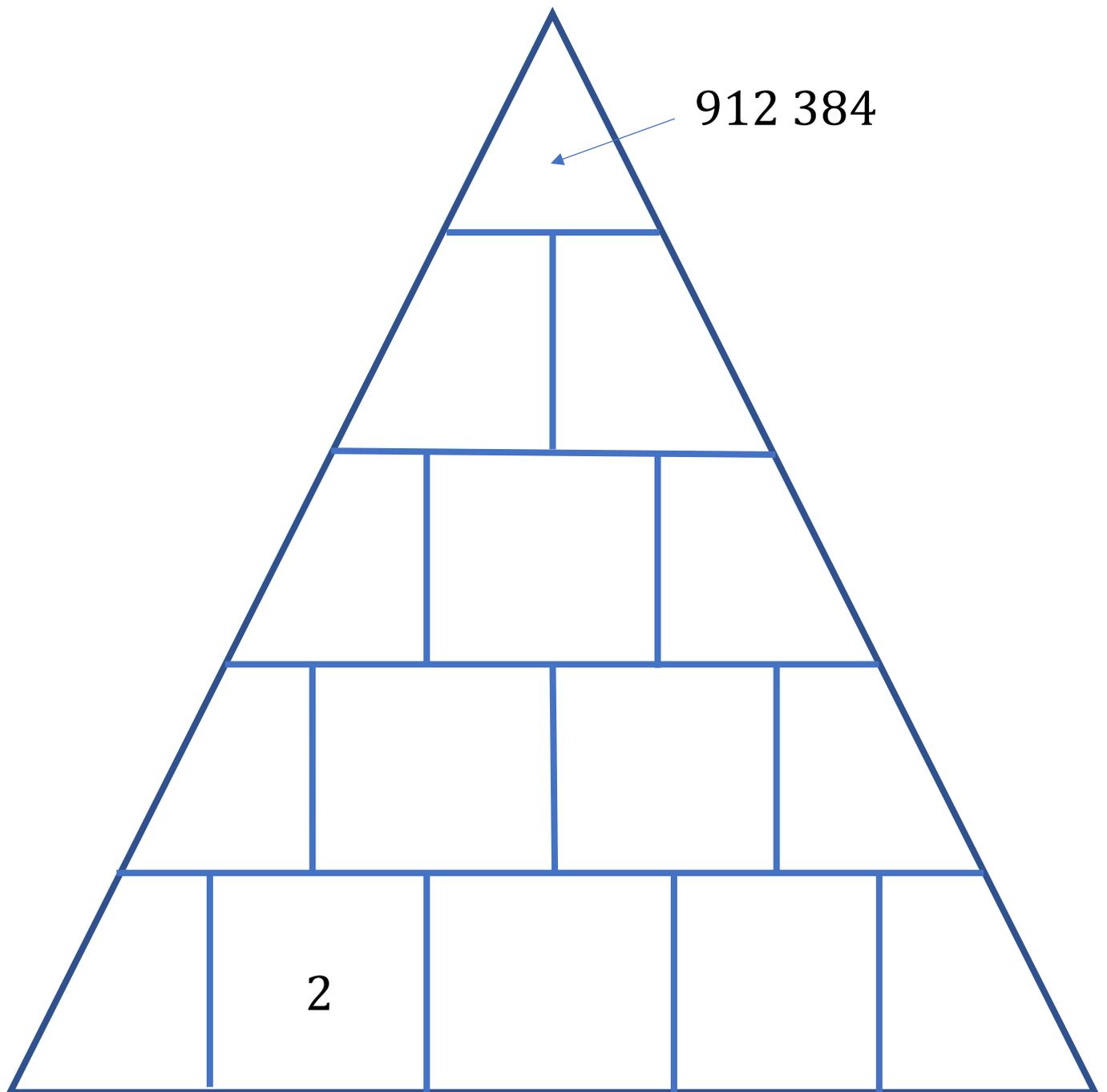
17. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale au produit des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série II.)

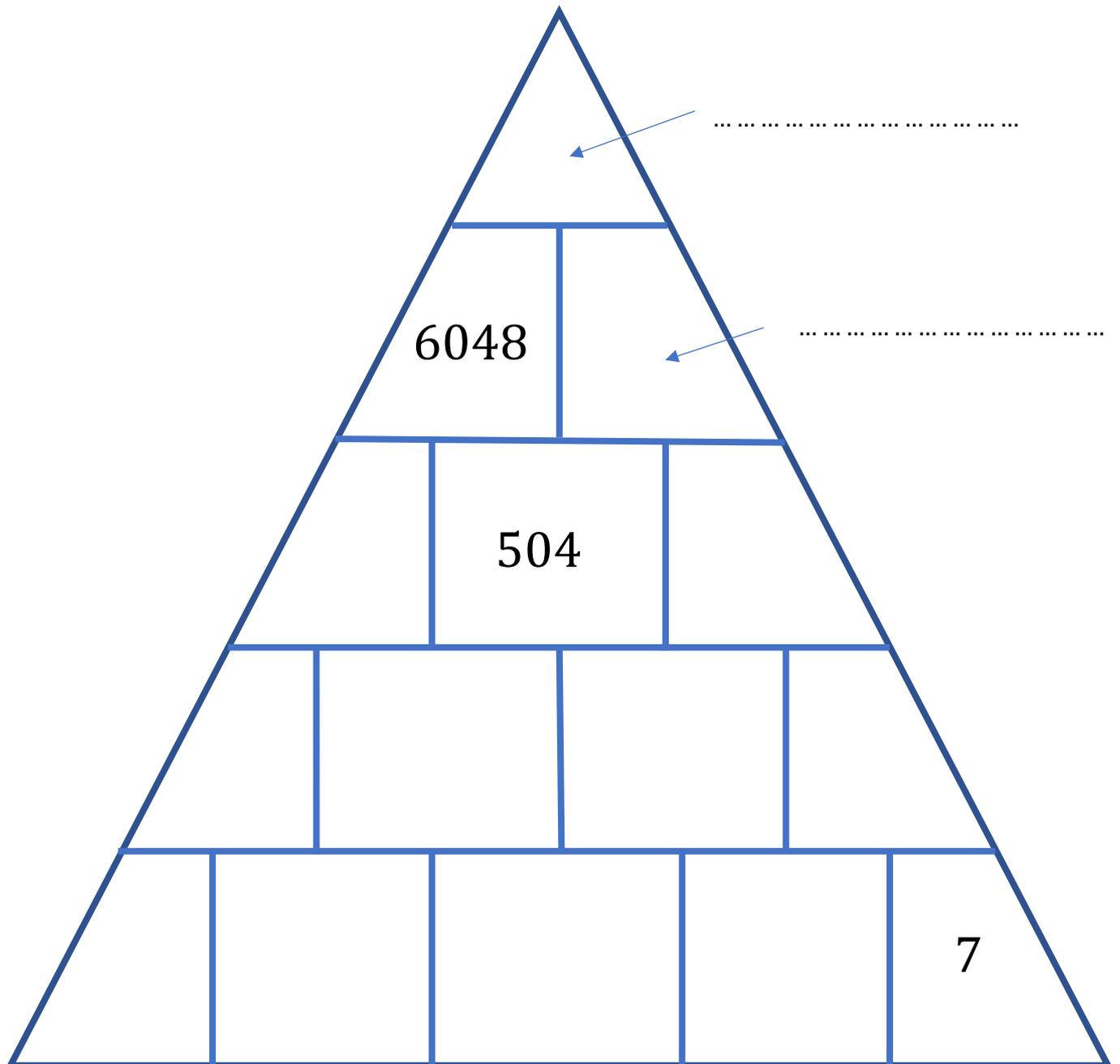
18. Compléter la ligne du bas de la pyramide sachant que chaque case est égale au produit des cases situées juste en-dessous, que tous les nombres sont entiers et que chaque ligne est présentée de façon croissante.



Détail des calculs ou de la méthode : utilisation de la décomposition en facteurs premiers.

(Série II.)

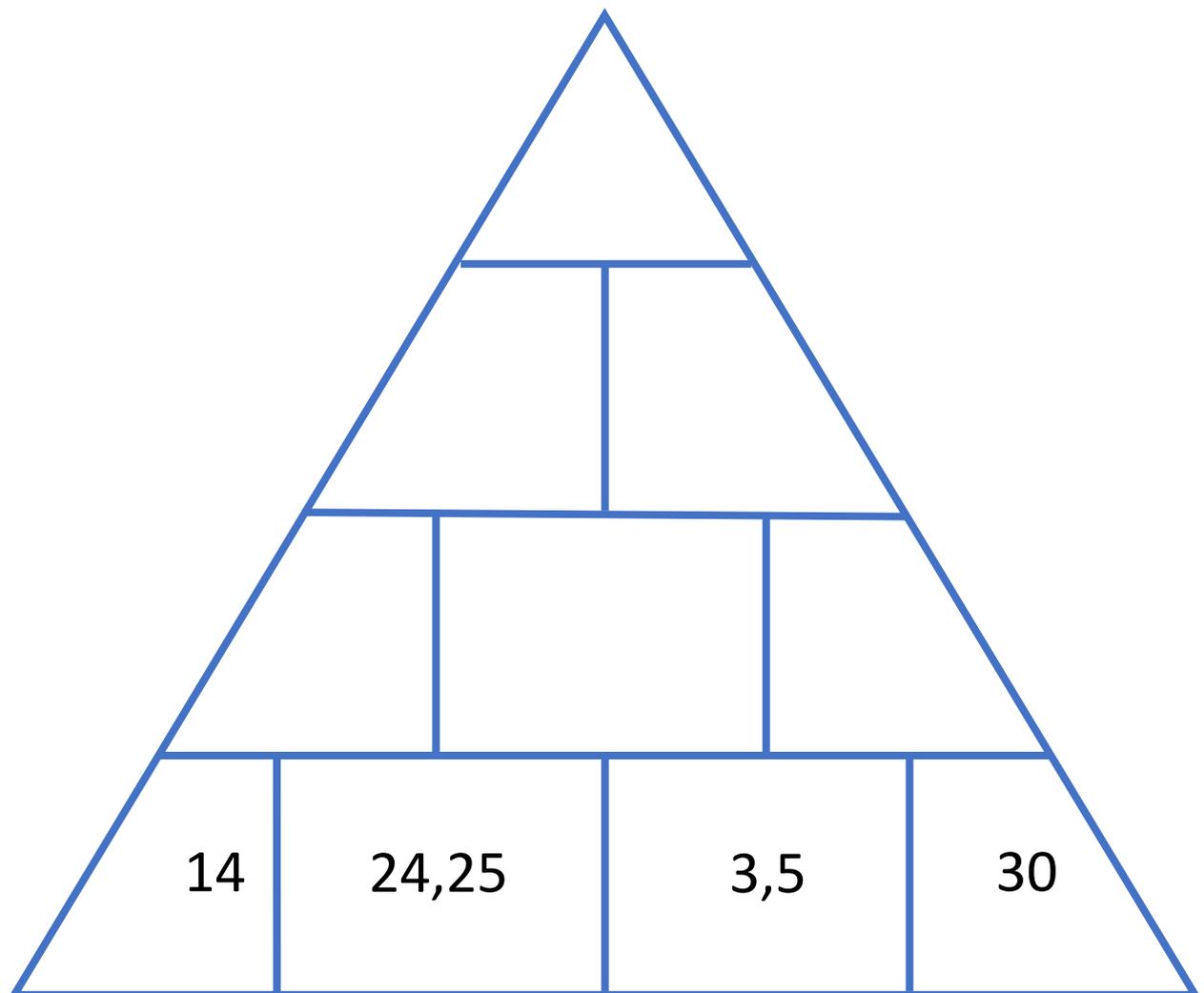
19. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale au produit des cases situées juste en-dessous, que chaque ligne est croissante et que tous les nombres sont entiers.



Détail des calculs ou de la méthode : utilisation de la décomposition en facteurs premiers.

SÉRIE III – COMBINAISONS D'OPÉRATIONS

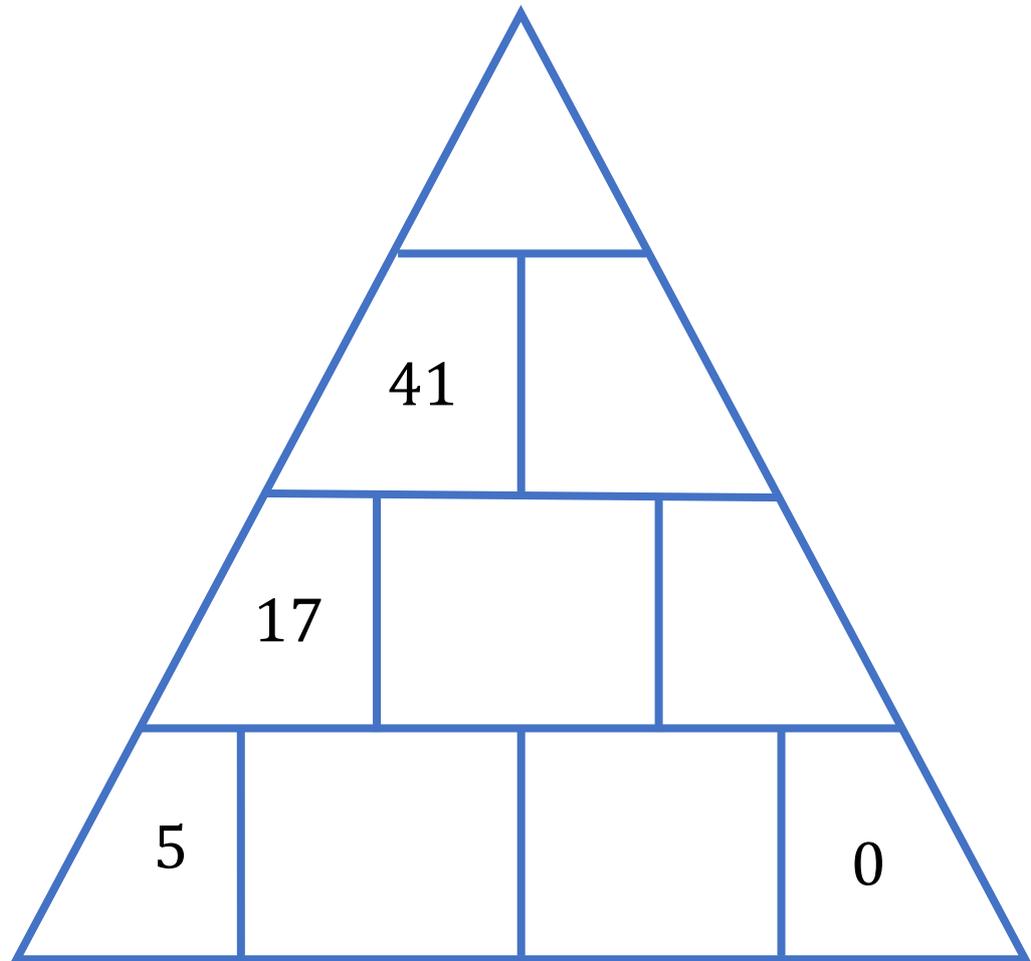
1. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme de la case en dessous à gauche et du double de la case en dessous à droite.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série III.)

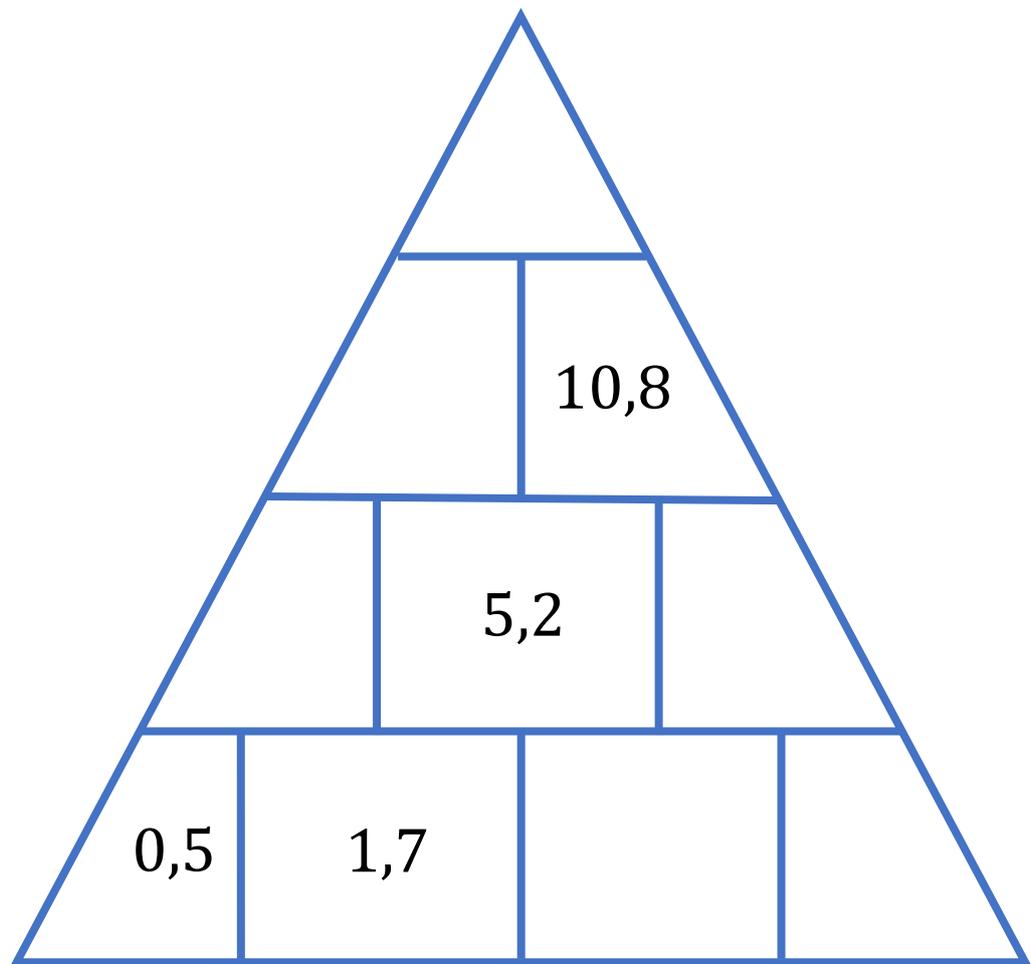
2. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme de la case en dessous à gauche et du double de la case en dessous à droite.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série III.)

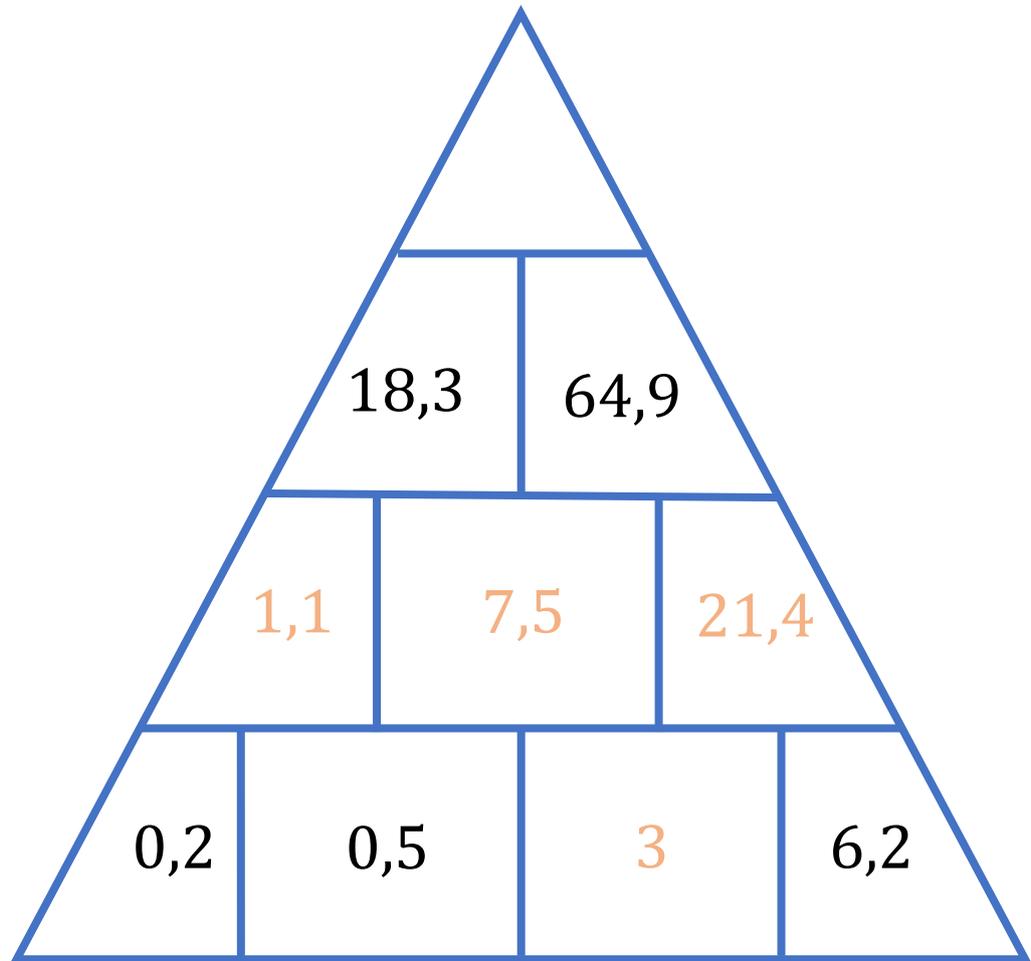
3. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme de la case en dessous à gauche et du double de la case en dessous à droite.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série III.)

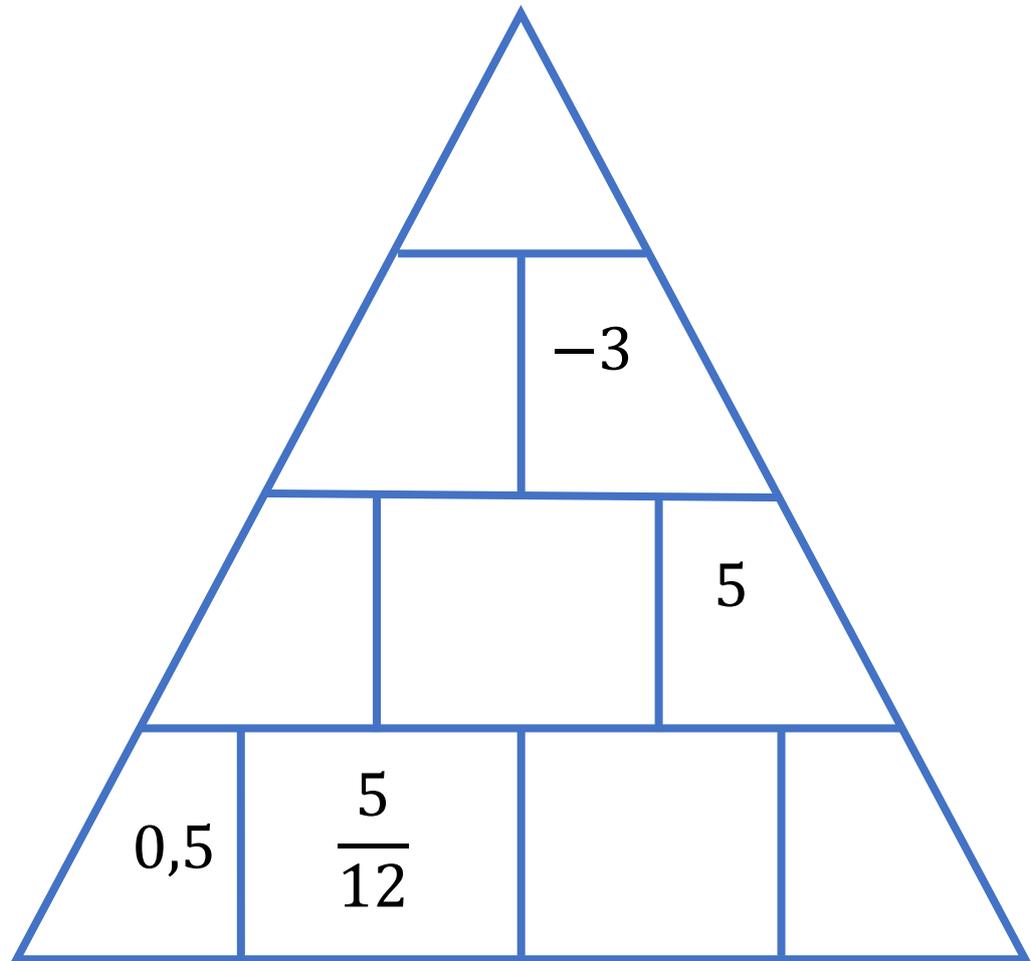
4. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme du triple de la case en dessous à gauche et du double de la case en dessous à droite.



Détail des calculs ou de la méthode : au cycle 3, par tâtonnements à partir d'ordres de grandeurs. Ensuite par résolution algébrique (équations).

(Série III.)

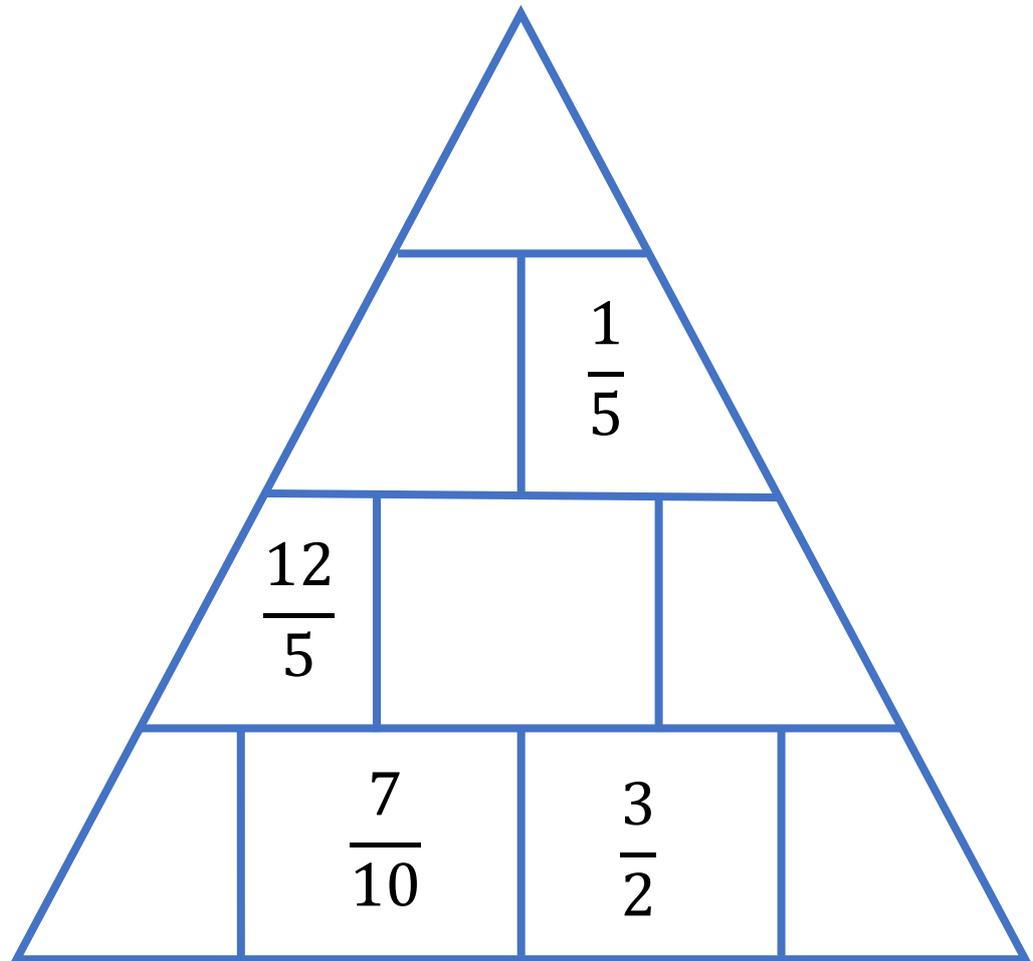
5. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme de la case en dessous à gauche et du double de la case en dessous à droite.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série III.)

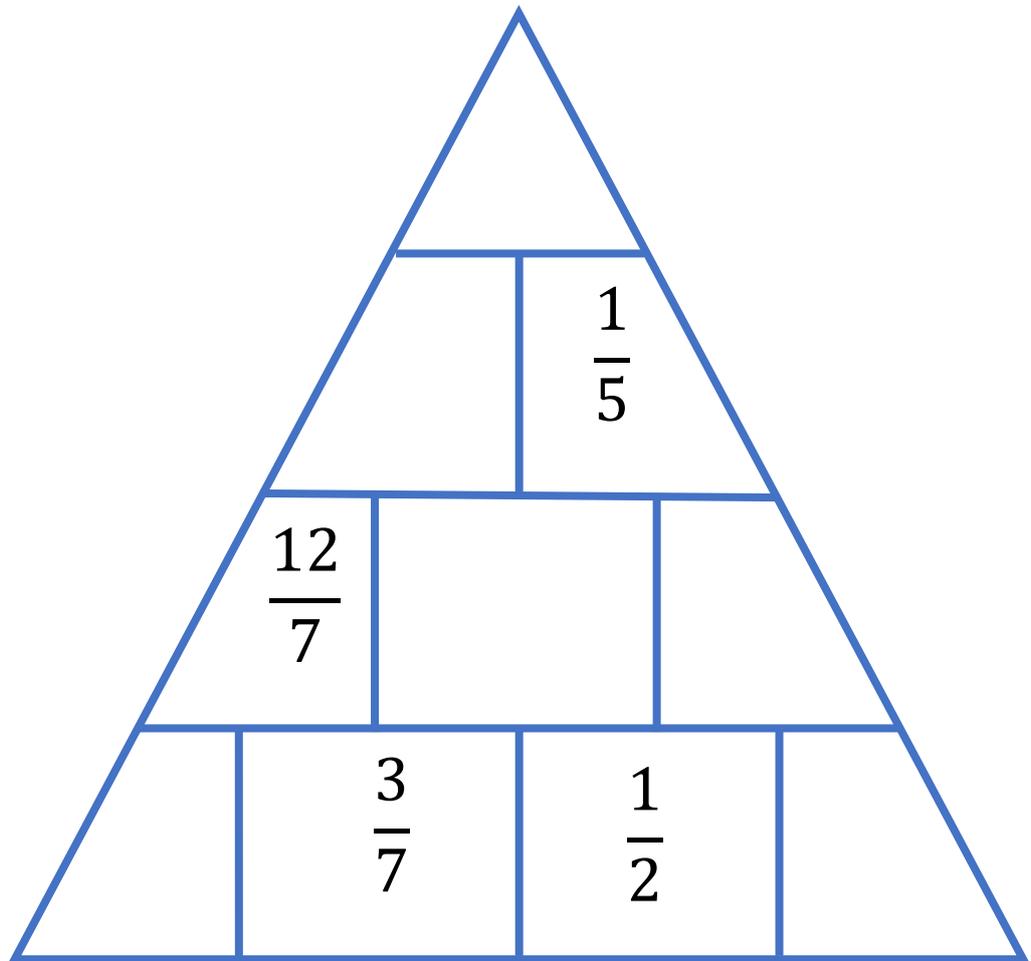
6. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme de la case en dessous à gauche et du double de la case en dessous à droite.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série III.)

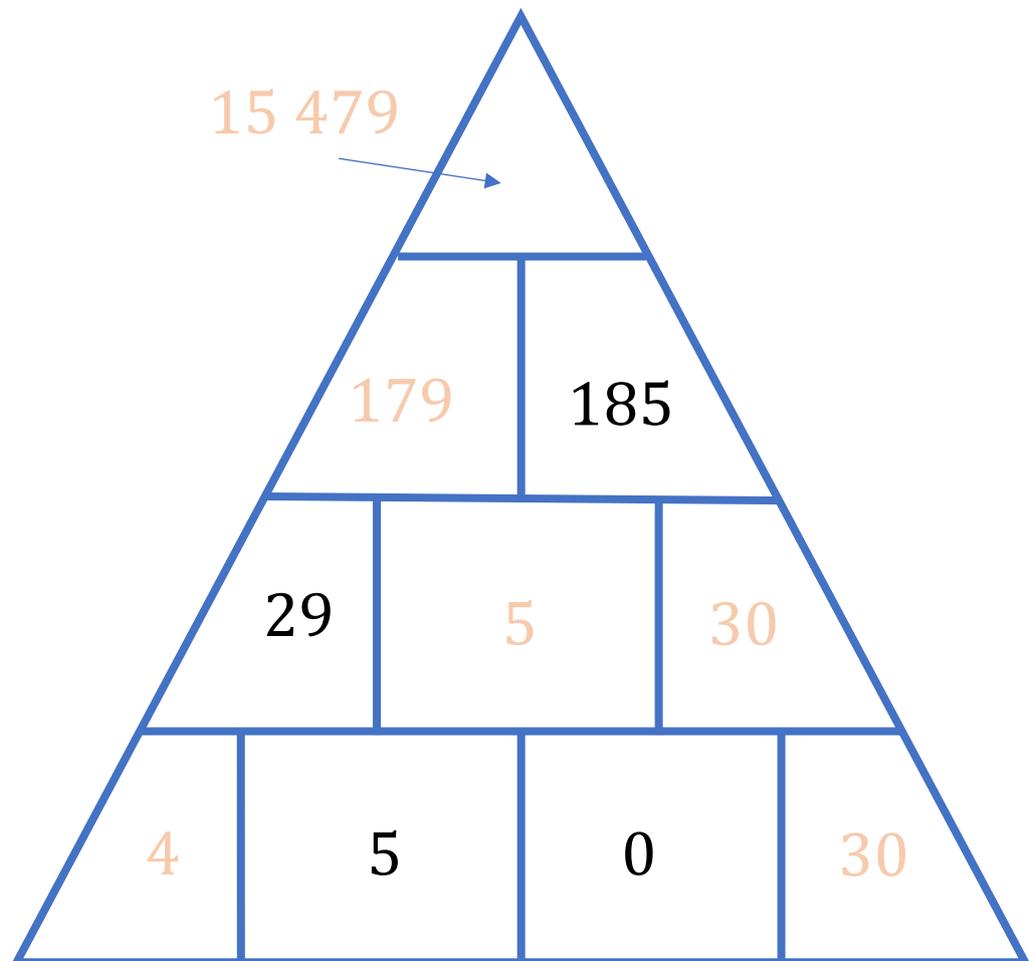
7. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme de la case en dessous à gauche et du double de la case en dessous à droite.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série III.)

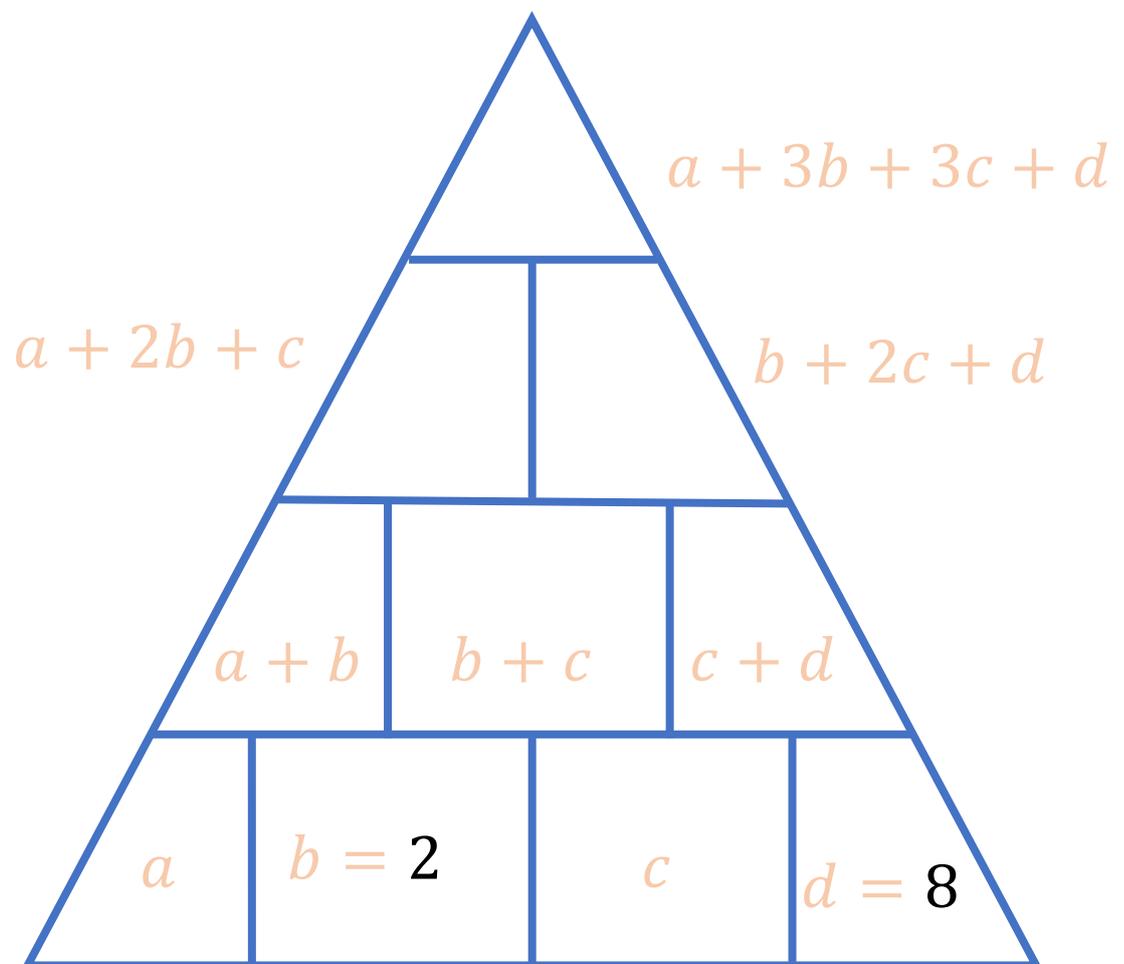
8. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des deux cases en dessous ainsi que du produit de ces cases.



Détail des calculs ou de la méthode : si a et b sont les deux cases en-dessous, à gauche et à droite, $a+b+ab=a(b+1)+b$ ou $(a+1)b+a$. Résolution par calculs directs (pour « monter ») ou équations (pour trouver une case « du bas »).

(Série III.)

9. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des deux cases en dessous et que la somme de toutes les cases est égale à 100 (uniquement des nombres entiers ; solution non unique).



Détail des calculs ou de la méthode :

$$(a+b+c+d)+(a+2b+2c+d)+(a+3b+3c+d)+(a+3b+3c+d)=100$$

donc $4a+4d+9b+9c=100$ donc avec $b=2$ et $d=8$,

$4(a+2)+9(b+8)=100$ donc $4a+9b=20$ donc par exemple $a=14$ et $b=4$

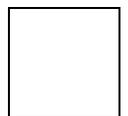
SÉRIE IV – SOMMES (3D)

1. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous. La pyramide est à trois dimensions et les niveaux sont représentés en sections horizontales.



5	6		1
2	10	4	8
5	2		3
	6	8	7

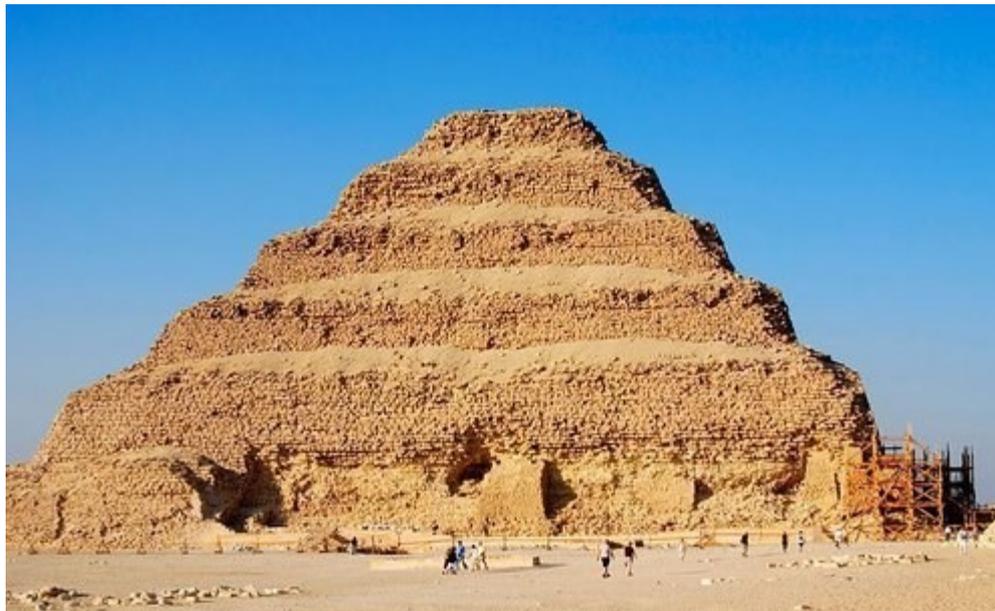
		13
	27	
20		



(Série IV.)

2. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous. La pyramide est à trois dimensions et les niveaux sont représentés en sections horizontales.

C4



2,4	5	16	7,3
1	0,3	4,7	18
2	3,8	0,2	2,1
16	2,2	3	3,7

8,7	26	46
7,1	9	25
24	9,2	9

50,8	106
49,2	52,2

258,2

Détail des calculs ou de la méthode :
équations successives, tâtonnements,
en partant du haut de la pyramide.

(Série IV.)

3. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous. La pyramide est à trois dimensions et les niveaux sont représentés en sections horizontales.

C4



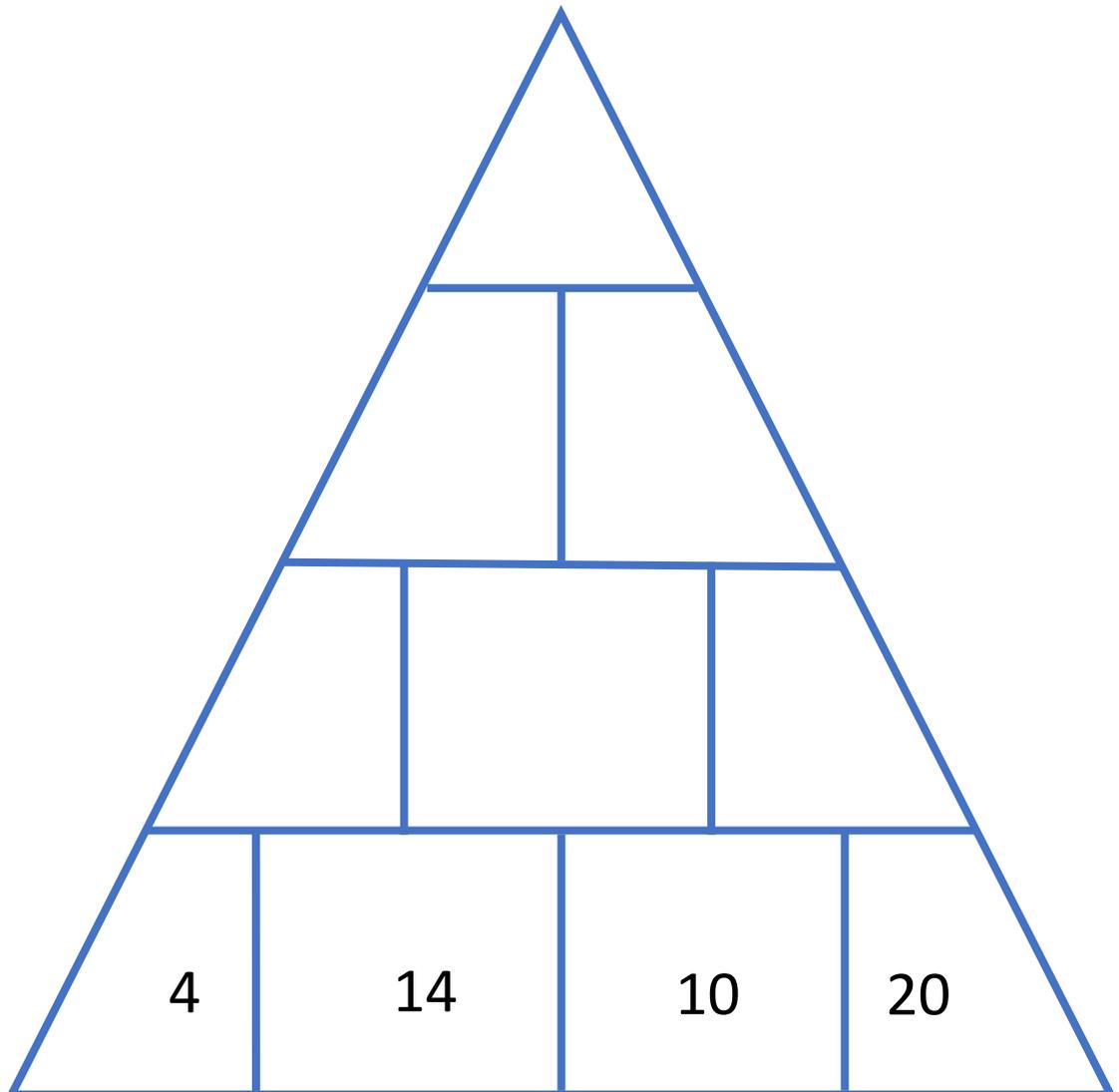
-1		-6	1
2	3	4	8
5	-3	0	3
6		10	-5

46	
20	



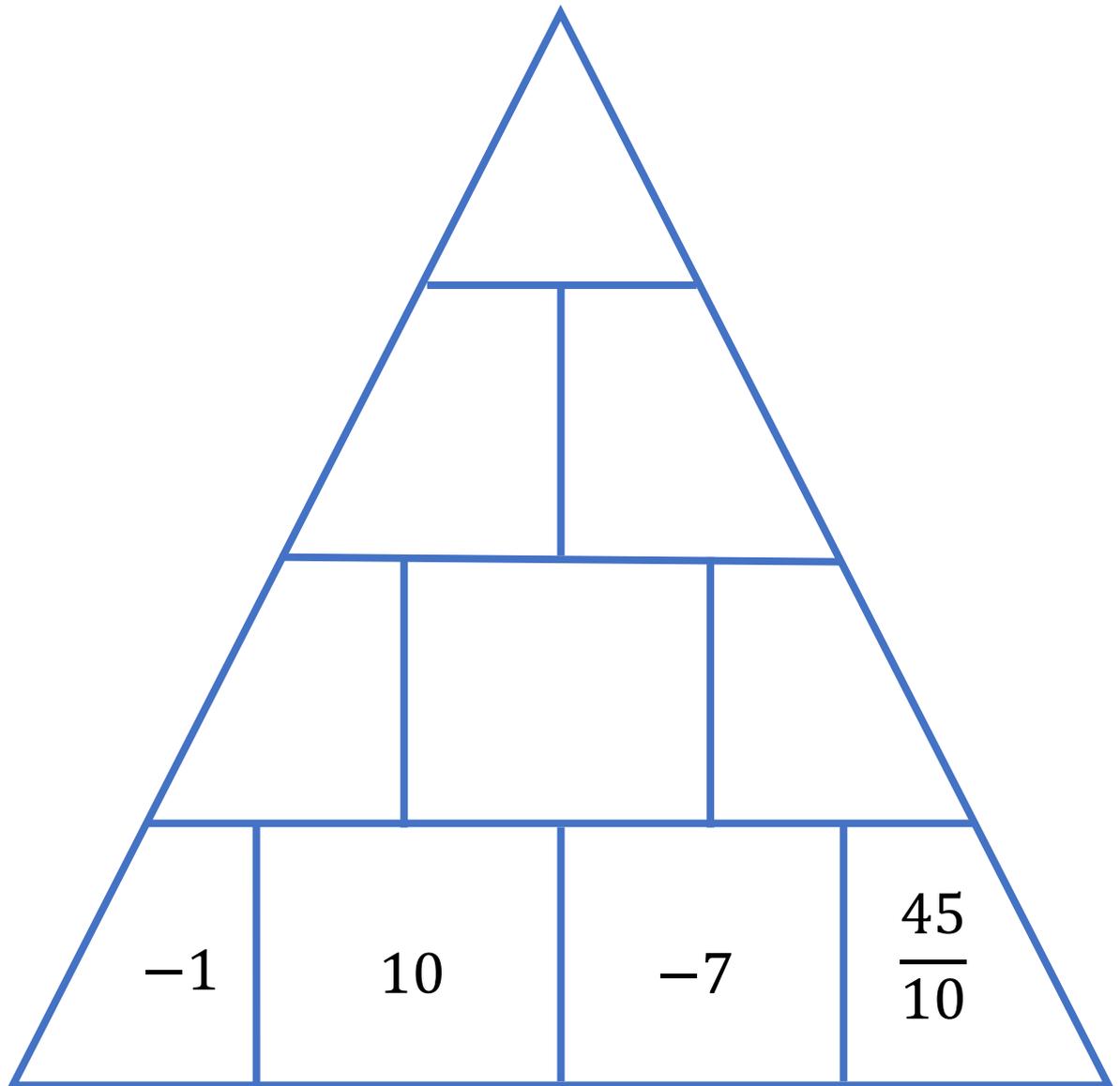
SÉRIE V – MOYENNES

1. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la moyenne des cases situées juste en-dessous.



(Série V.)

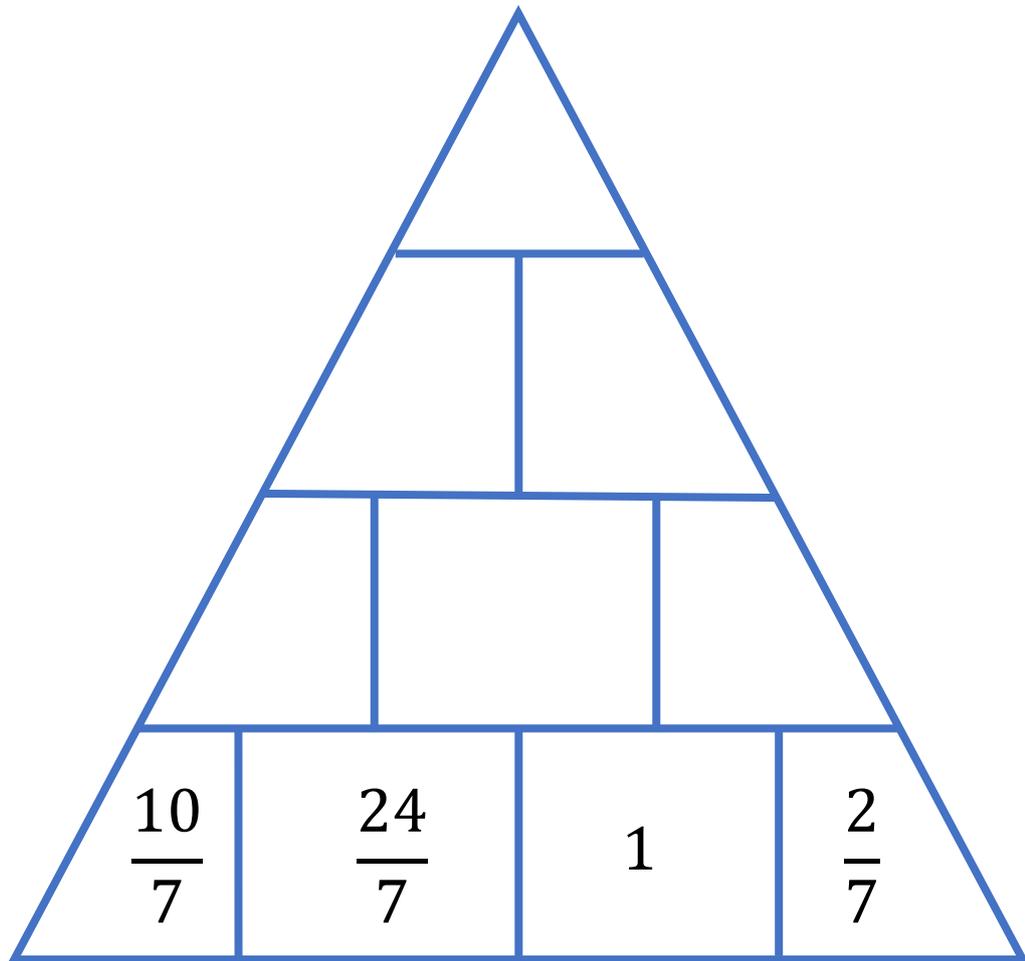
2. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la moyenne des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série V.)

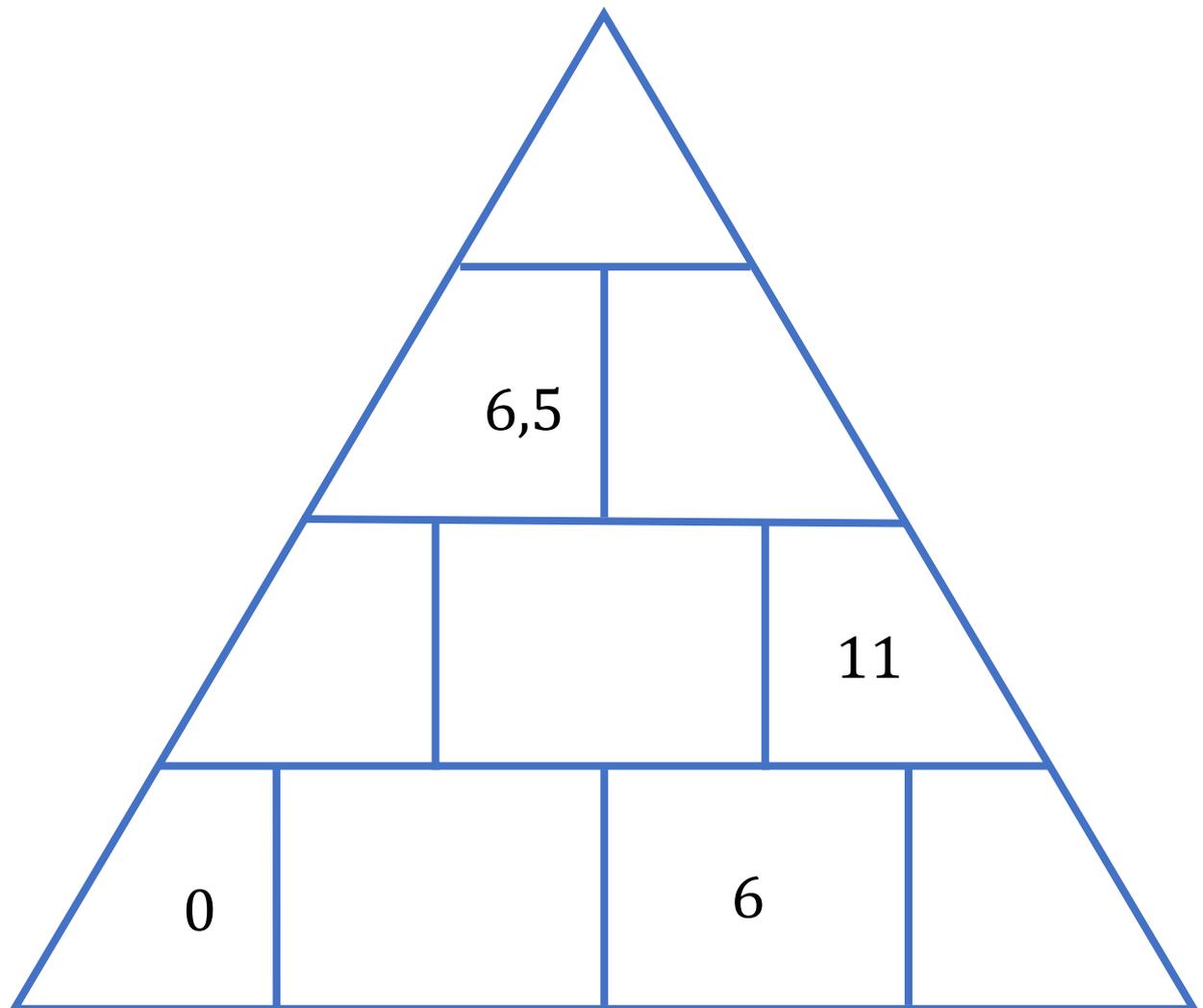
3. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la moyenne des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série V.)

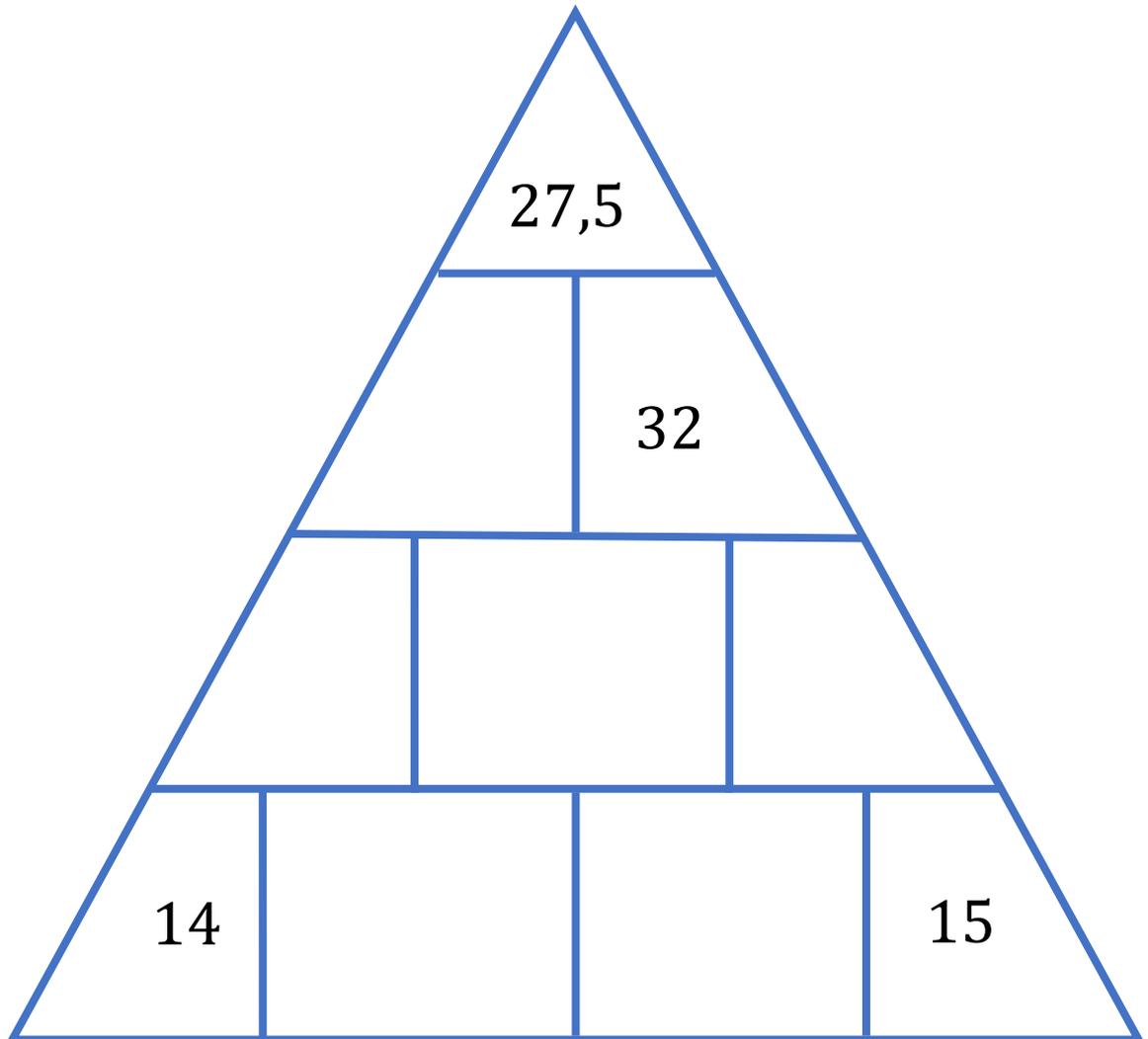
4. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la moyenne des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série V.)

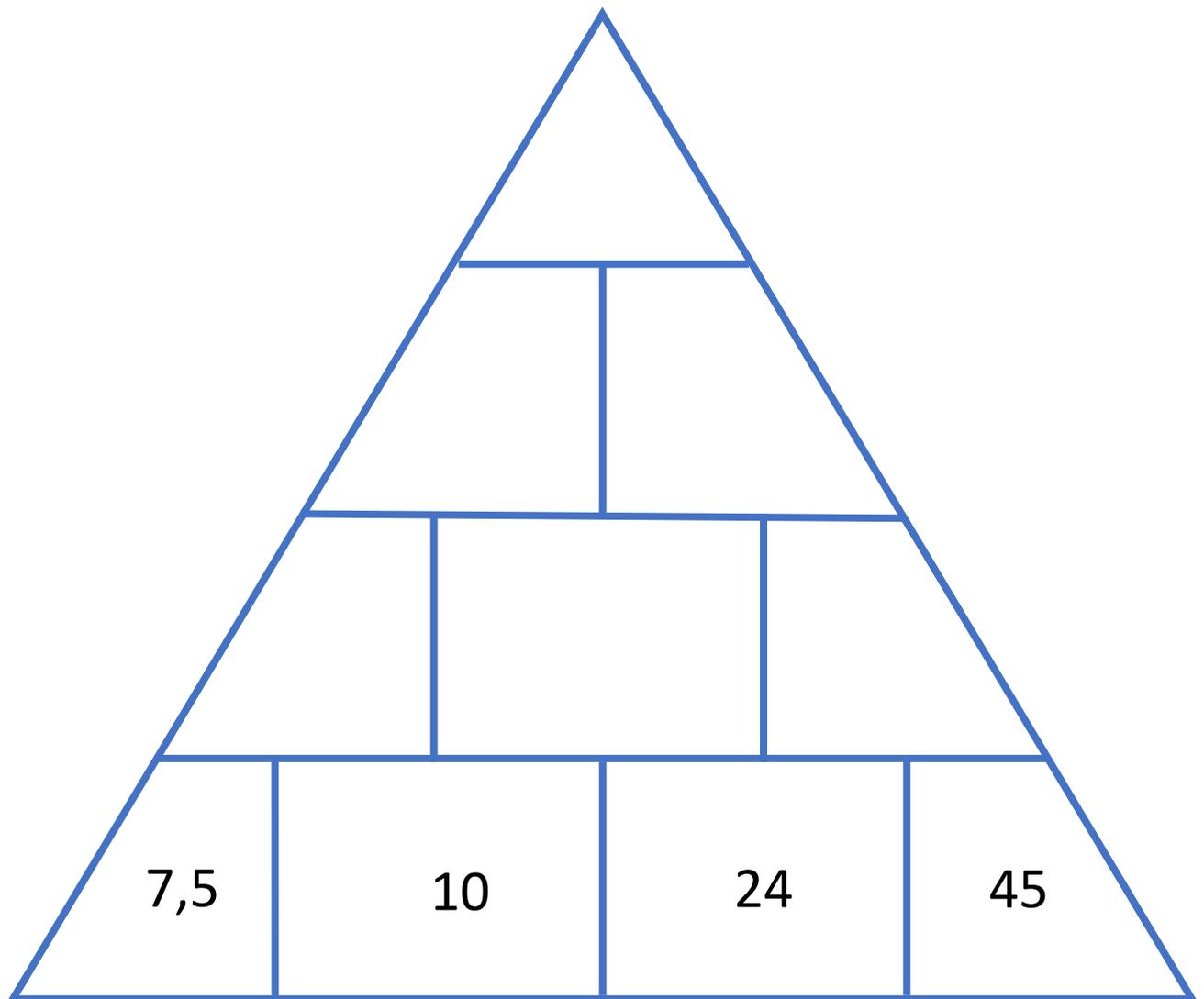
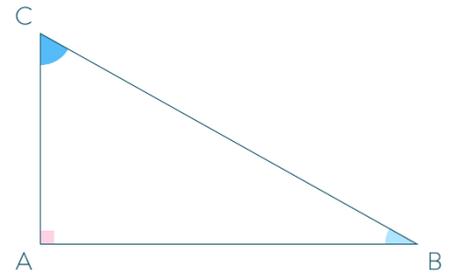
5. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la moyenne des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

SÉRIE VI – TRIANGLES RECTANGLES

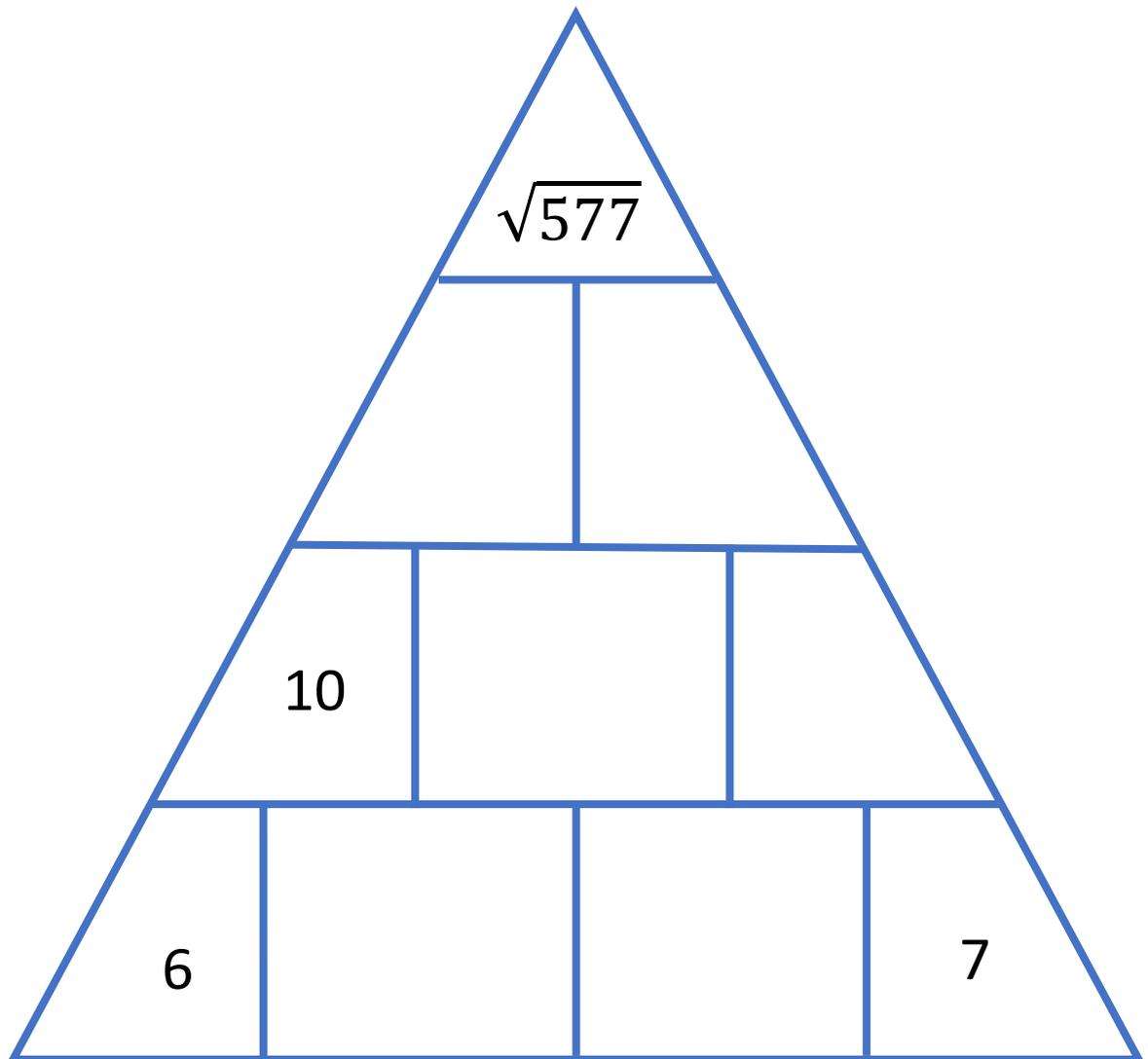
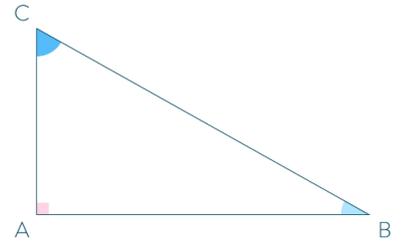
1. Compléter la pyramide sachant que chaque case est la longueur BC du triangle ABC rectangle en A, dont les valeurs de AB et AC sont les cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série VI.)

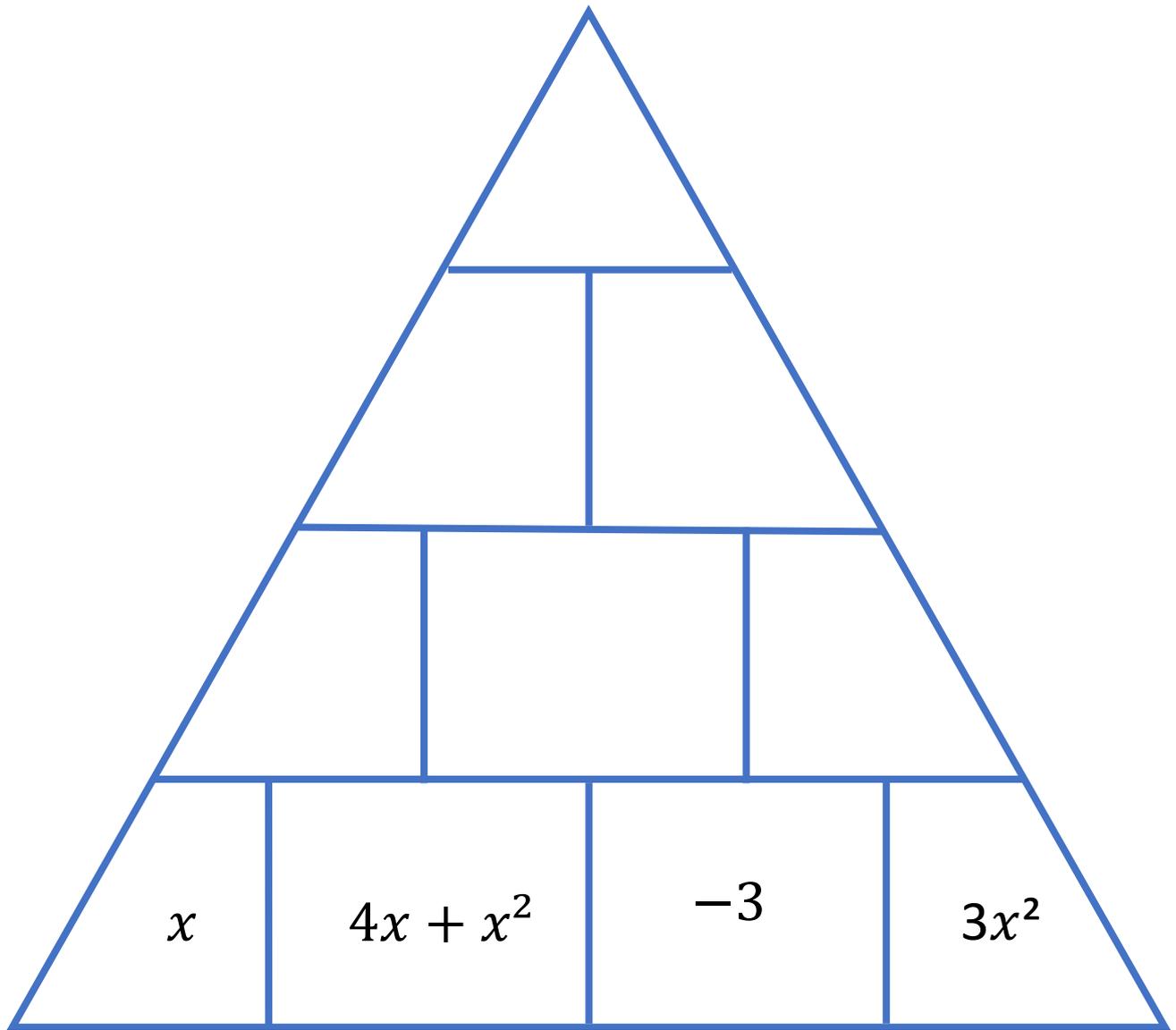
2. Compléter la pyramide sachant que chaque case est la longueur BC du triangle ABC rectangle en A, dont les valeurs de AB et AC sont les cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

SÉRIE VII – CALCUL LITTÉRAL

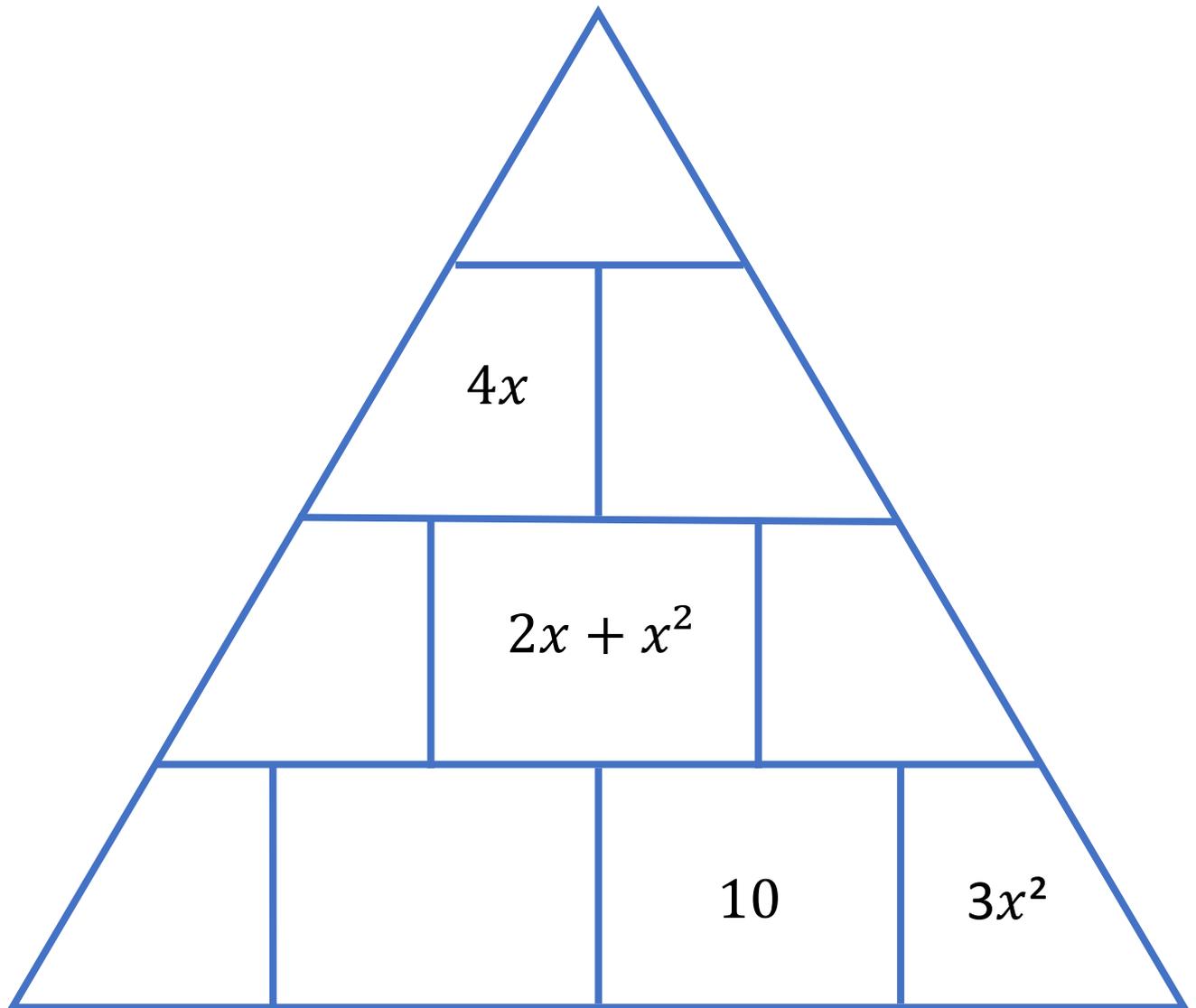
1. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série VII.)

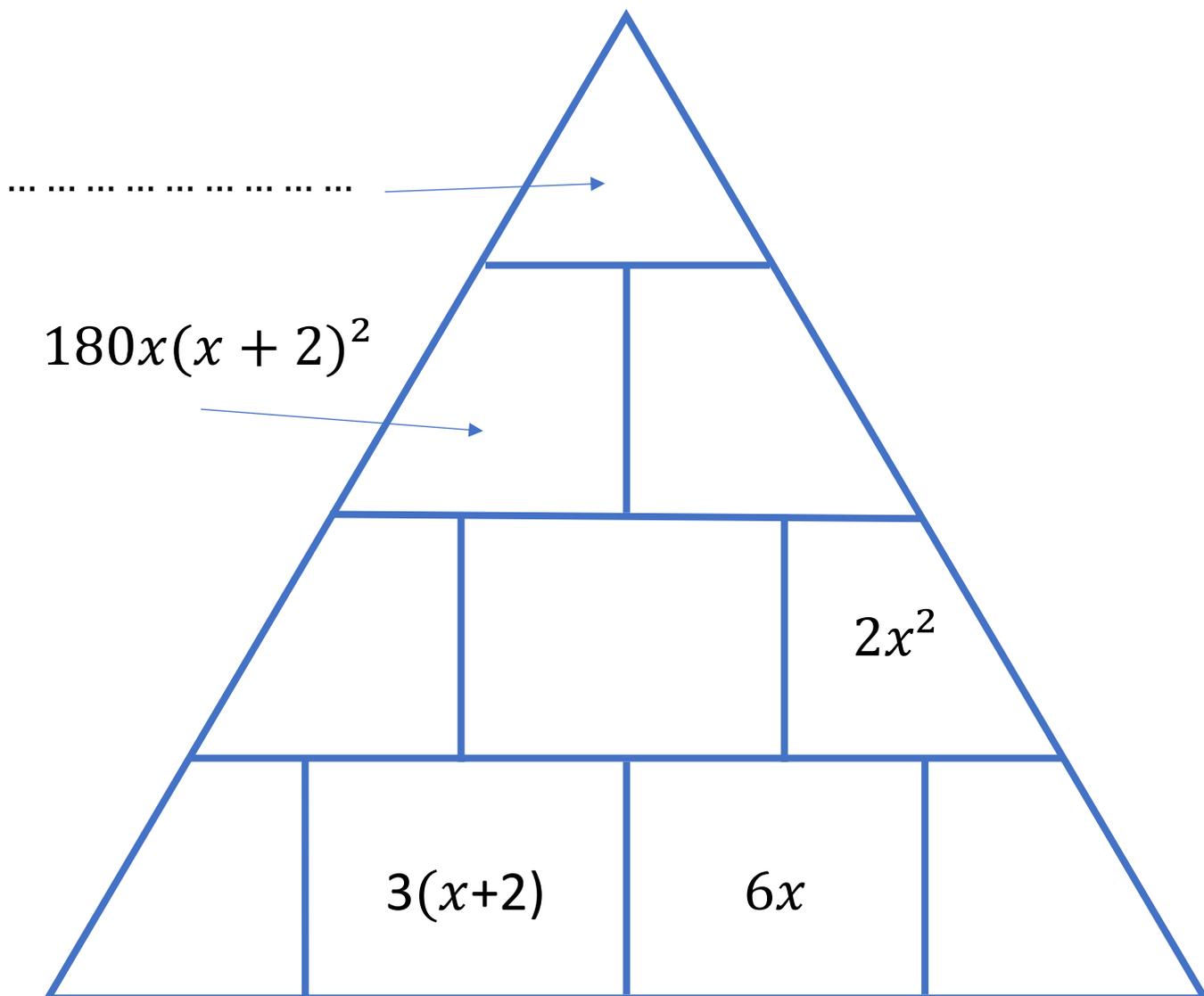
2. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série VII.)

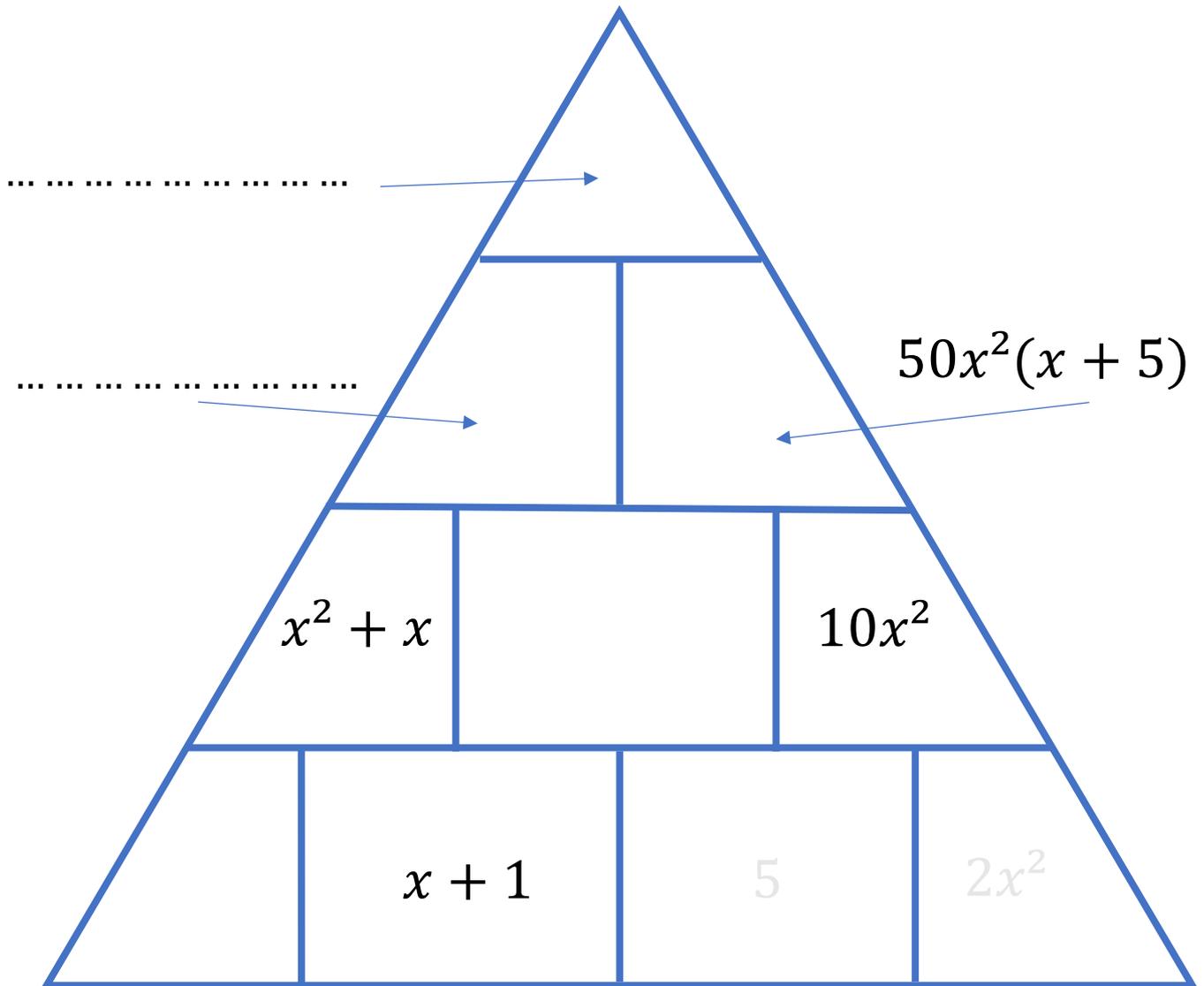
3. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale au produit des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série VII.)

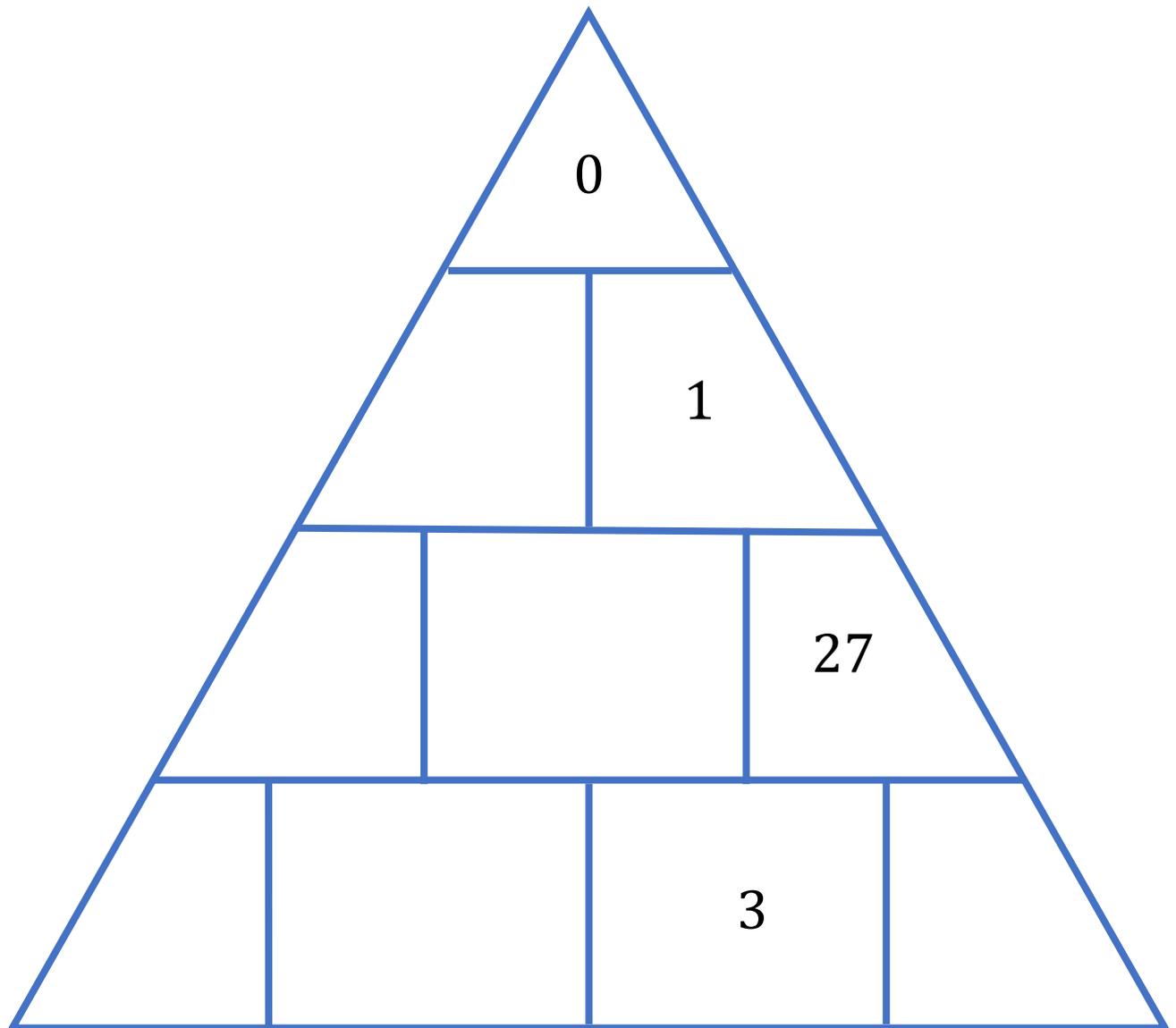
4. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale au produit des cases situées juste en-dessous.



Détail des calculs ou de la méthode : factoriser $x^2 + x$ en $x(x + 1)$...

SÉRIE VIII – PUISSANCES

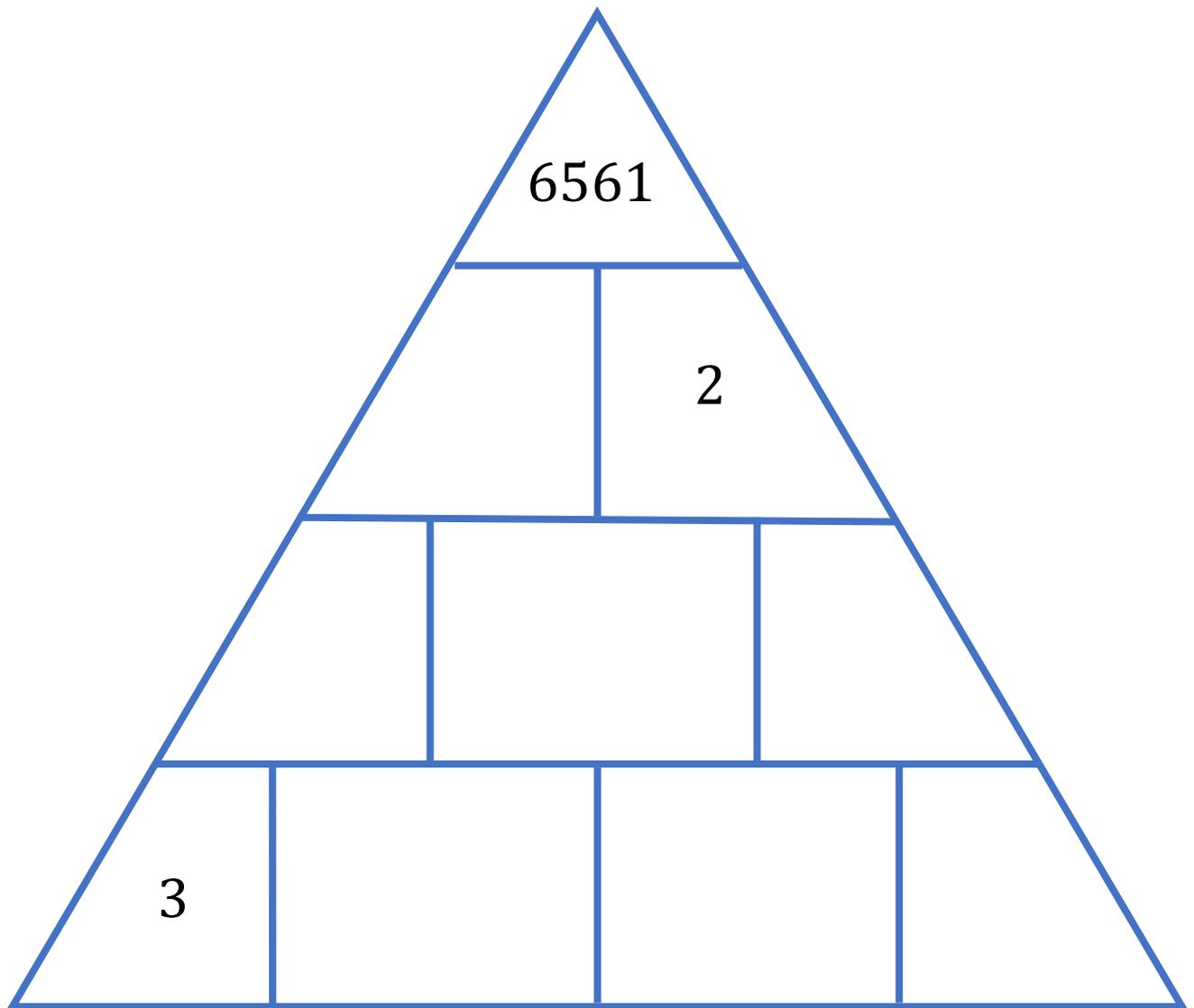
1. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la case en bas à gauche « exposant » celle en bas à droite.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série VIII.)

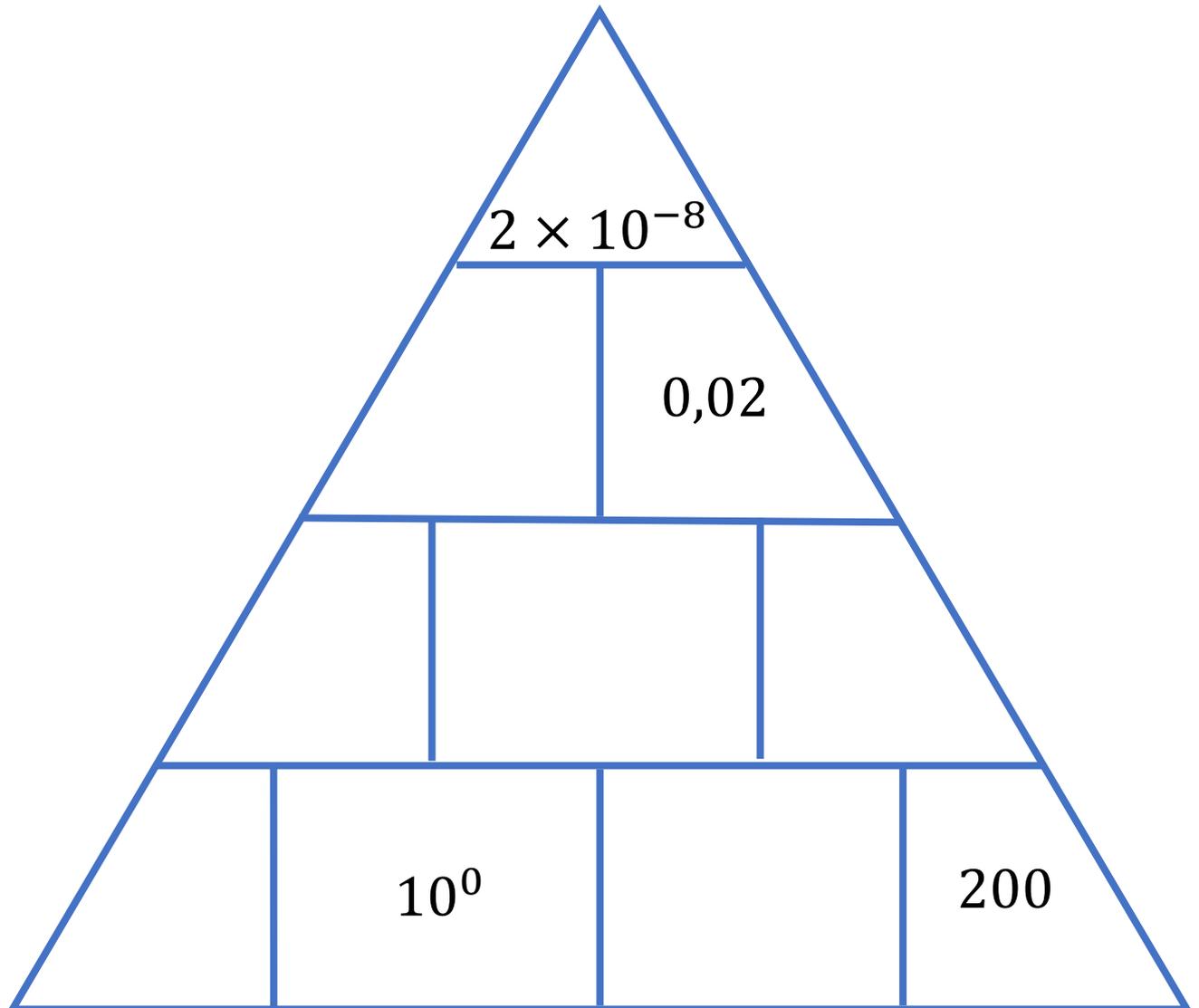
2. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à la case en bas à gauche « exposant » celle en bas à droite.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série VIII.)

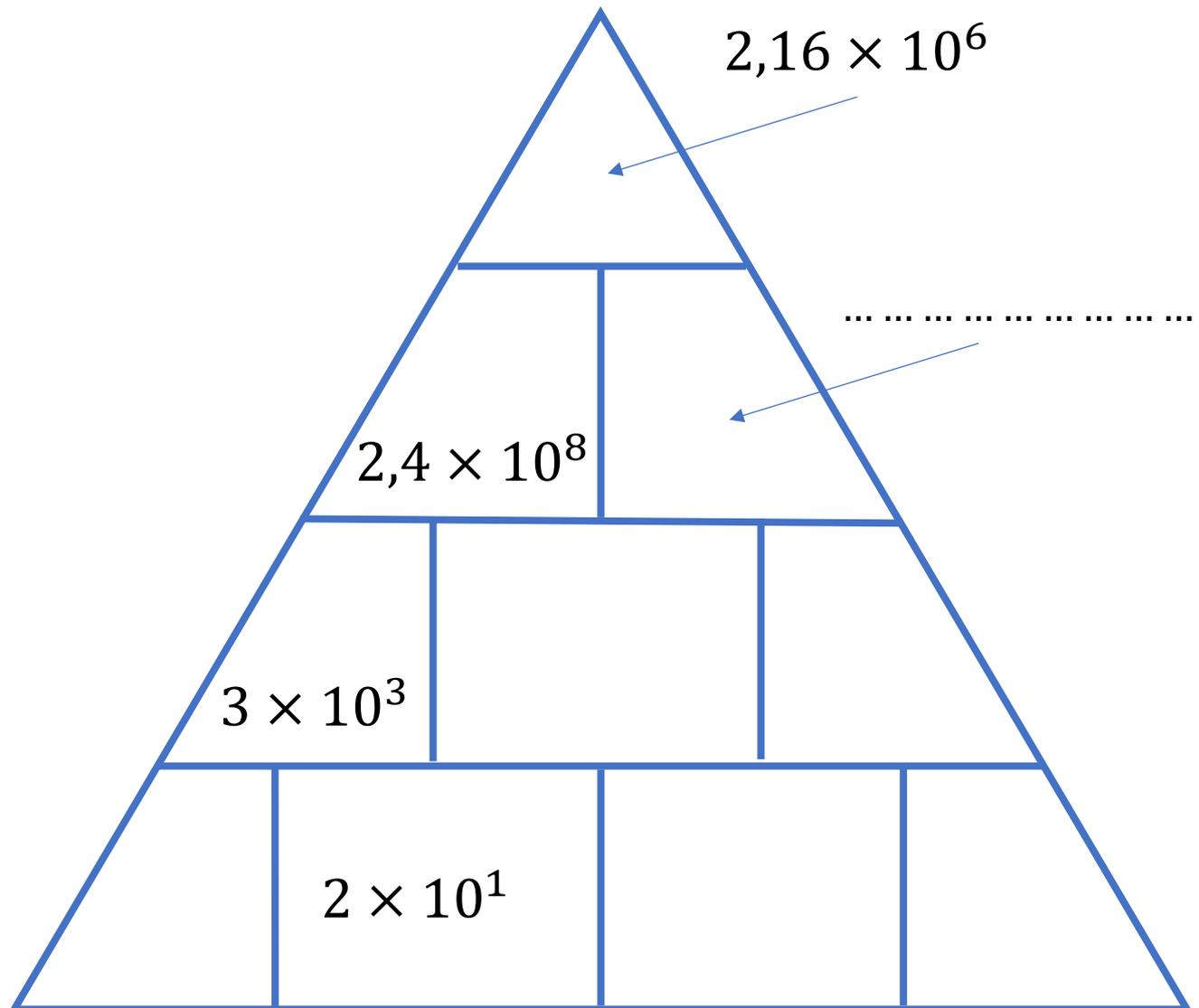
3. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale au produit de celles situées en dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série VIII.)

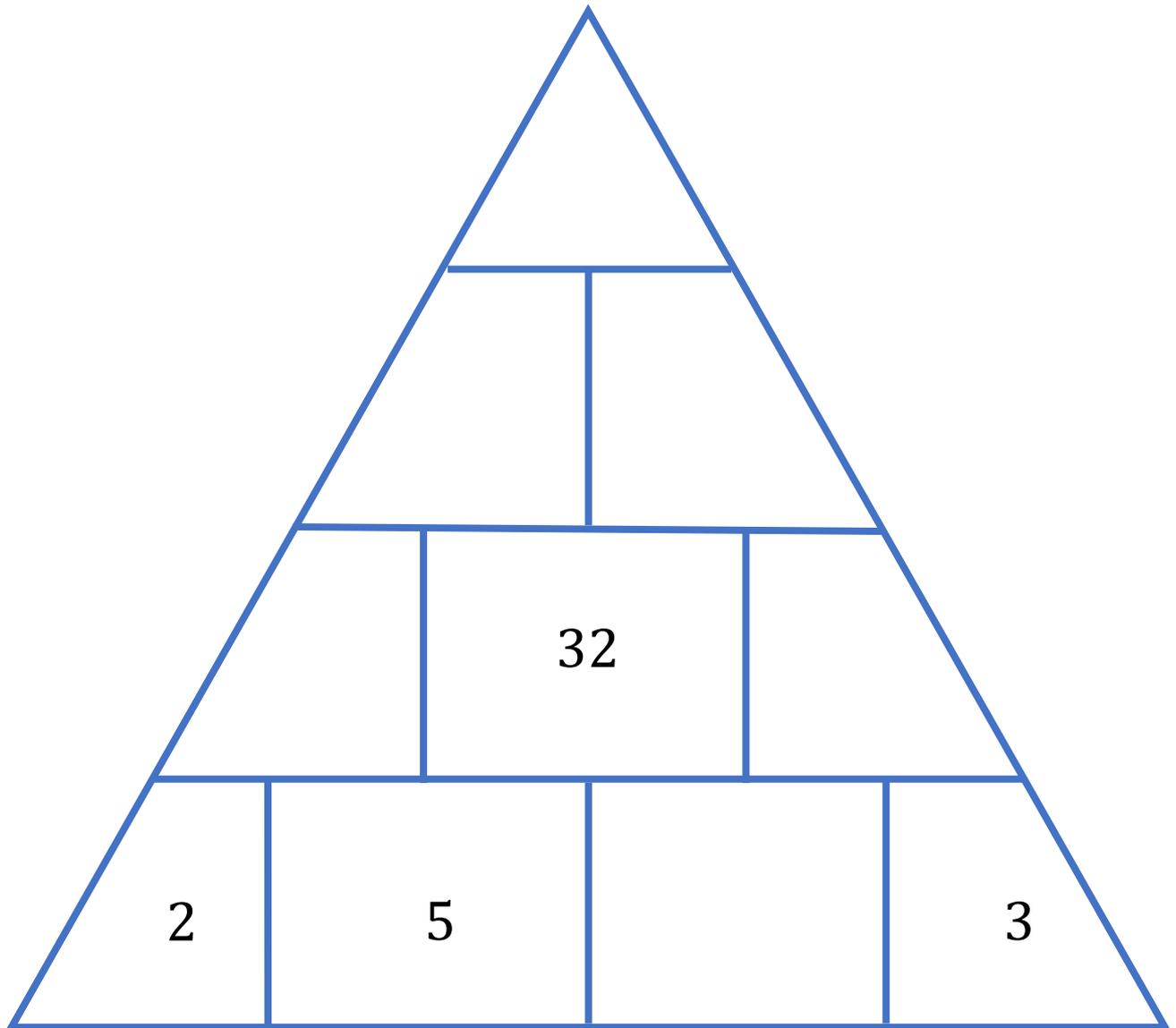
4. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale au produit de celles situées en dessous.



Détail des calculs ou de la méthode :

SÉRIE IX – FONCTIONS

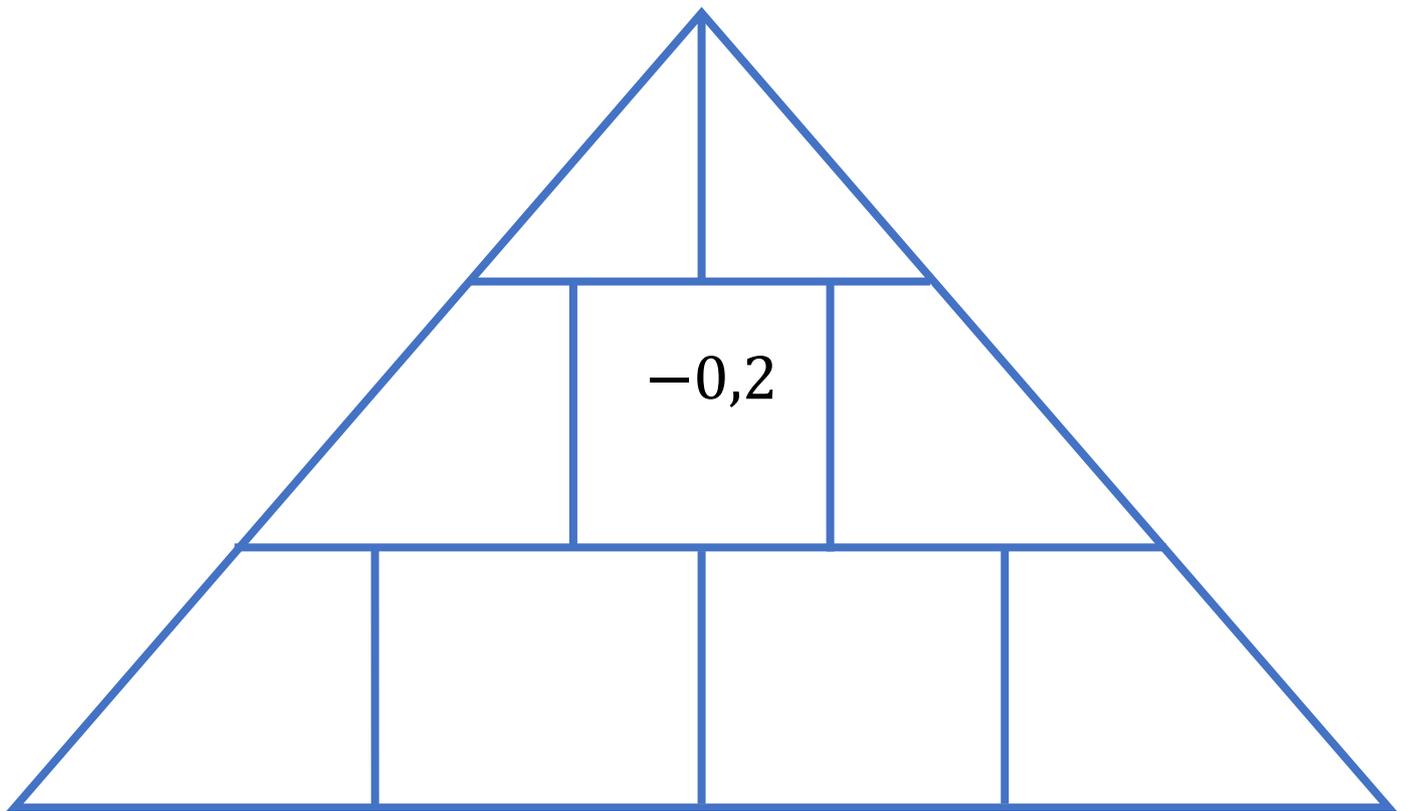
1. Compléter la pyramide sachant que chaque case est l'image de 10 par f , avec $f(x) = ax + b$ et a et b les valeurs des cases situées juste en-dessous, de gauche à droite.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série IX.)

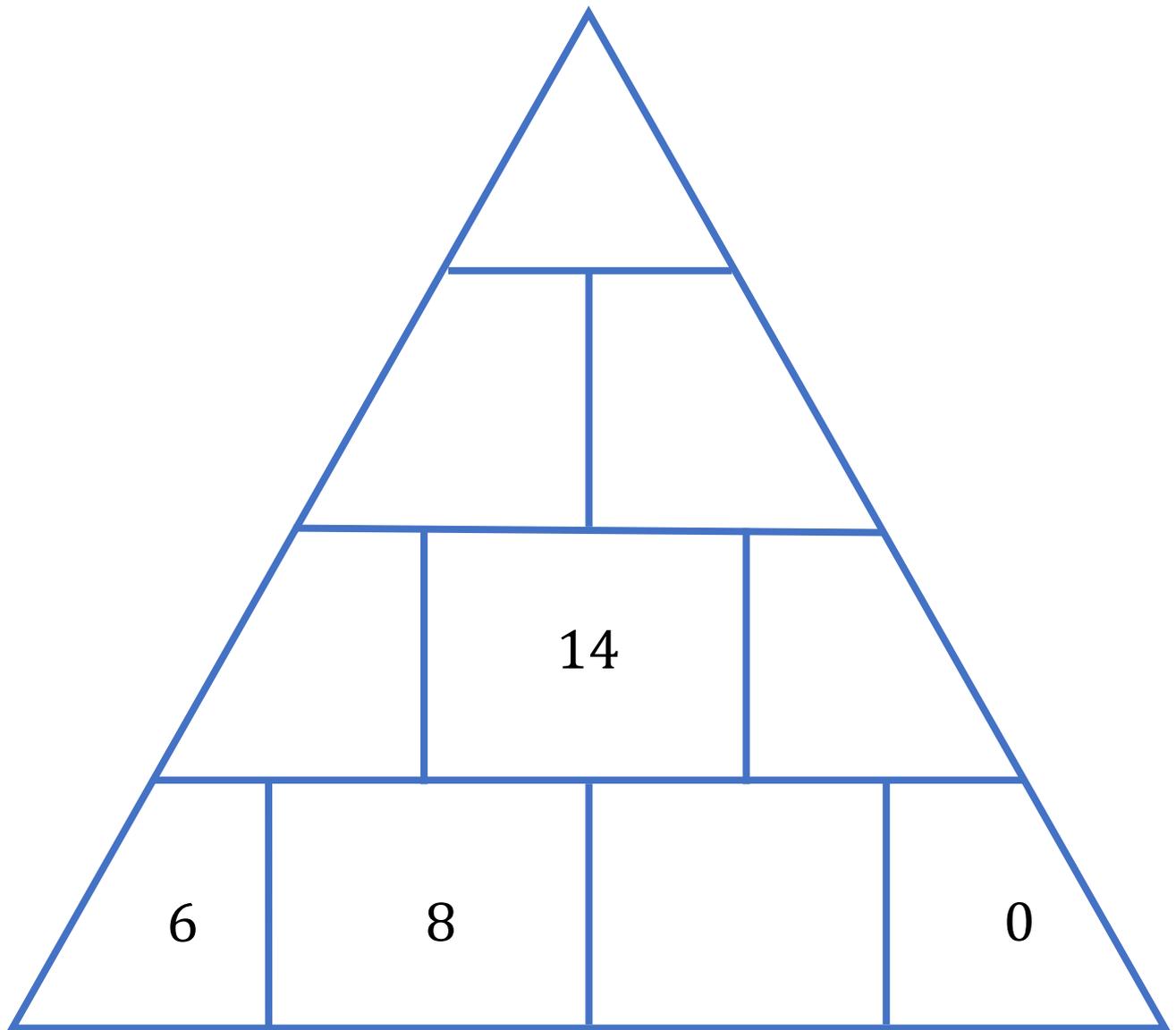
2. Compléter la pyramide sachant que chaque case est l'image de la case en haut à droite par f , et l'antécédent de celle en haut à gauche par f , avec $f(x) = -x + 2$.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série IX.)

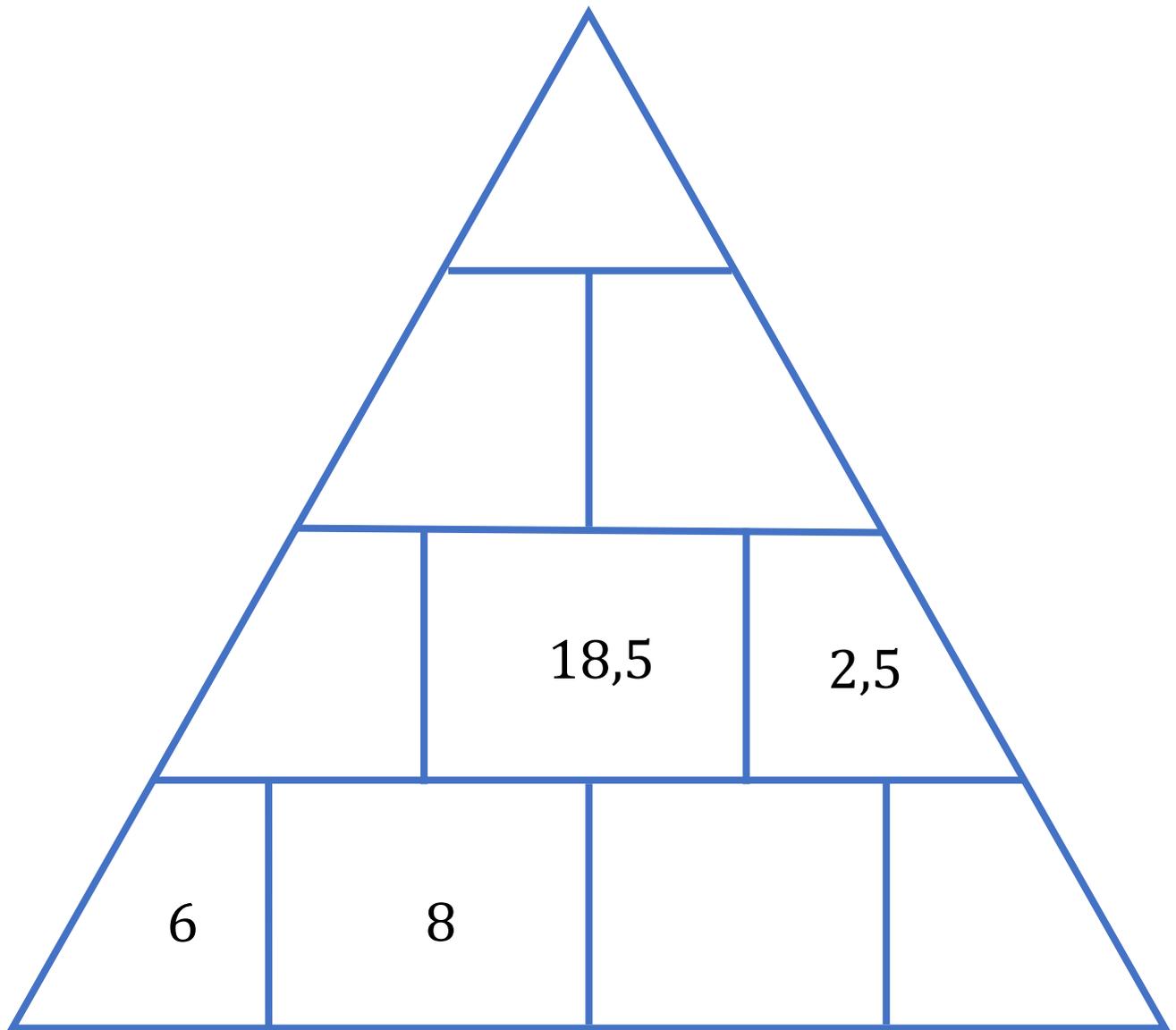
3. Compléter la pyramide sachant que chaque case est l'image de la case en bas à gauche par f , avec $f(x) = 3x + b$ et b la valeur de la case en bas à droite.



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série IX.)

4. Compléter la pyramide sachant que chaque case est l'image de la case en bas à droite par f , avec $f(x) = ax + 2,5$ et a la valeur de la case en bas à gauche.

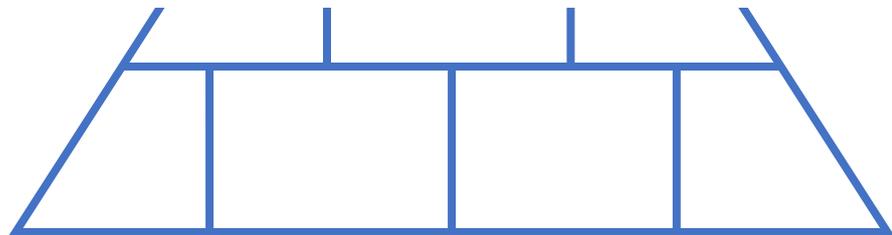
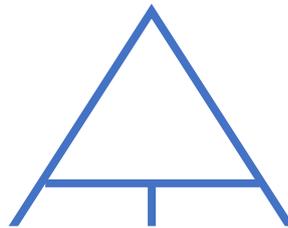


Détail des calculs ou de la méthode :

SÉRIE X – SUITES

1. Dans cette pyramide de nombres, chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous.

La ligne la plus basse étant constituée de 100 cases comportant toutes le nombre 1, quelle est la valeur de la case la plus haute ?

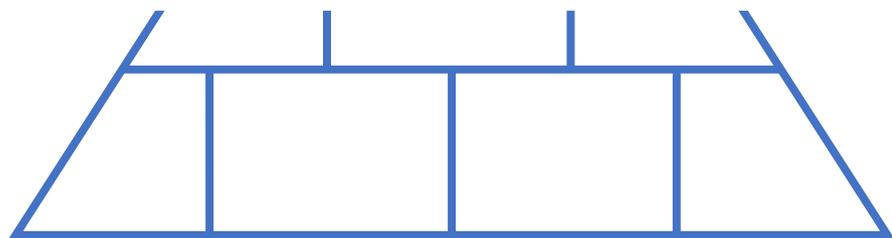
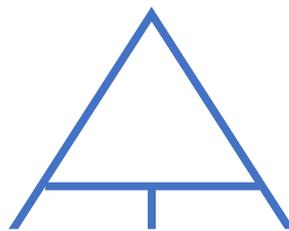


Détail des calculs ou de la méthode :

(Série X.)

2. Dans cette pyramide, chaque case est égale à la somme des cases situées juste en-dessous.

La ligne la plus basse étant constituée de 100 cases comportant les nombres de 1 à 100, quelle est la valeur de la case la plus haute ?



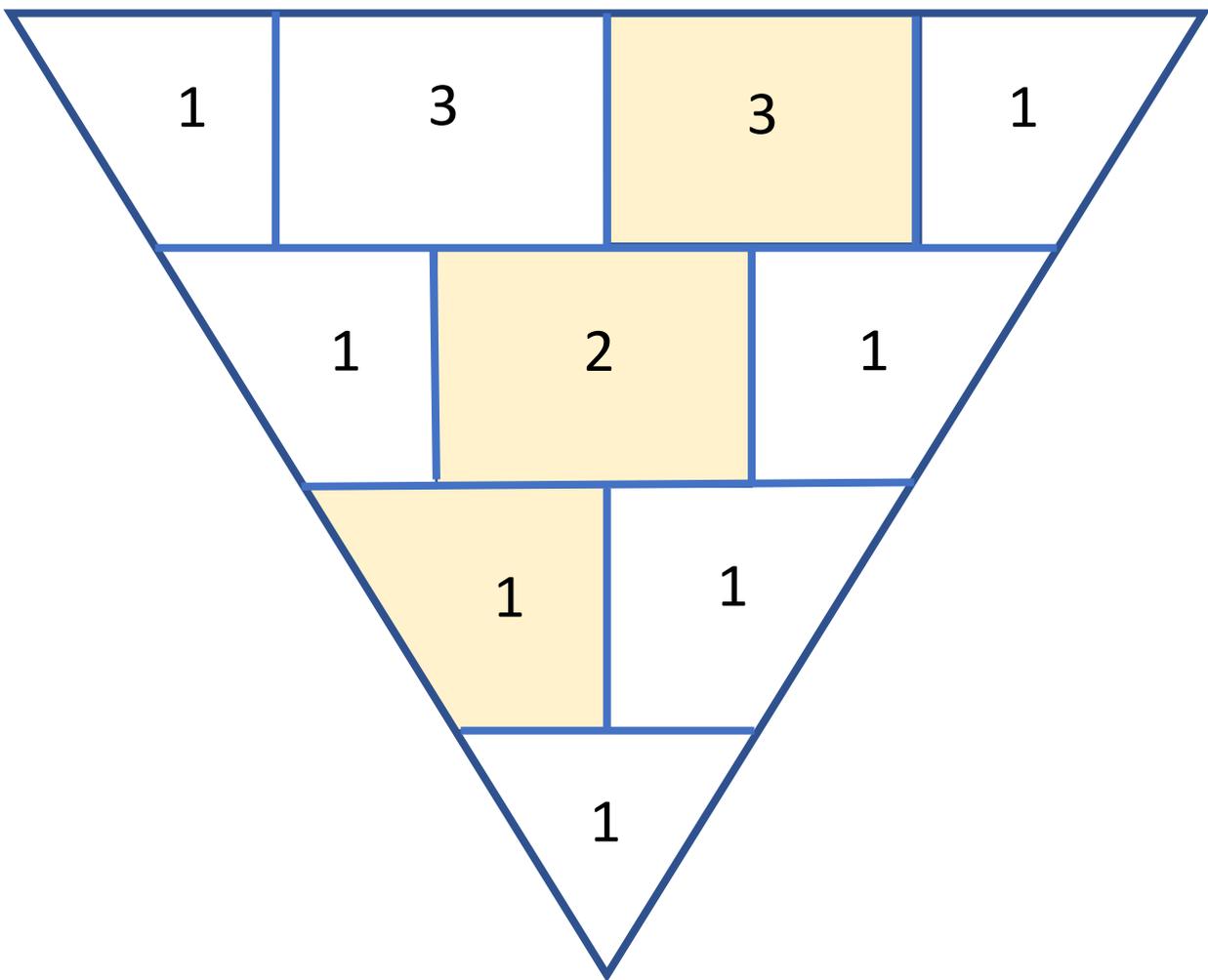
Détail des calculs ou de la méthode :

(Série X.)

3. (Triangle de Pascal et suite de Fibonacci)

Dans cette pyramide inversée, chaque case est égale à la somme des cases situées en-dessous.

Si on continue le procédé jusqu'à la 50^{ème} ligne, quelle sera la valeur des trois premières cases ? Quelle sera la somme de l'avant-dernière diagonale (cases colorées) ?



Détail des calculs ou de la méthode :

SÉRIE XI – BOULETS DE CANONS

Problème de Lucas

En 1875, le mathématicien Edouard Lucas (1842-1891) a posé la question suivante :

« *Une pyramide à base carrée peut-elle contenir une quantité carrée de boulets de canon ?* »



Autrement dit, est-ce que l'équation : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = C^2$ a des solutions ?

Edouard Lucas a conjecturé que les seules solutions étaient $n = 1$ et $n = 24$.

Il avait raison : la preuve date de 1918 ; elle a été trouvée par George Neville Watson (1886–1965).

(Série XI.)

1. Dans cet empilement carré de boulets de canon, combien y a-t-il de boulets ?



Détail des calculs ou de la méthode :

(Série XI.)

2. Dans un empilement carré de boulets de canon de hauteur n boulets, combien y a-t-il de boulets ?



Information : « SOMME DES ENTIERS DE 1 À n » = $\frac{n(n+1)}{2}$

Calculons $2^3 - 1^3 = ?$

Et $(n + 1)^3 - n^3 = ?$
 $3n^2 + 3n + 1$

(démontrer qu'il s'agit de

D'où : $2^3 - 1^3 = 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$

$3^3 - 2^3 = 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$

$4^3 - 3^3 = 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1$

...

$(n + 1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$

Ajoutons toutes les lignes rouges :

... ? = 3 « SOMME DES CARRÉS DE 1 À n »

+ 3 « SOMME DES ENTIERS DE 1 À n » + n

En déduire la valeur de « SOMME DES CARRÉS DE 1 À n »

(vérifier qu'il s'agit de $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

(Série XI.)

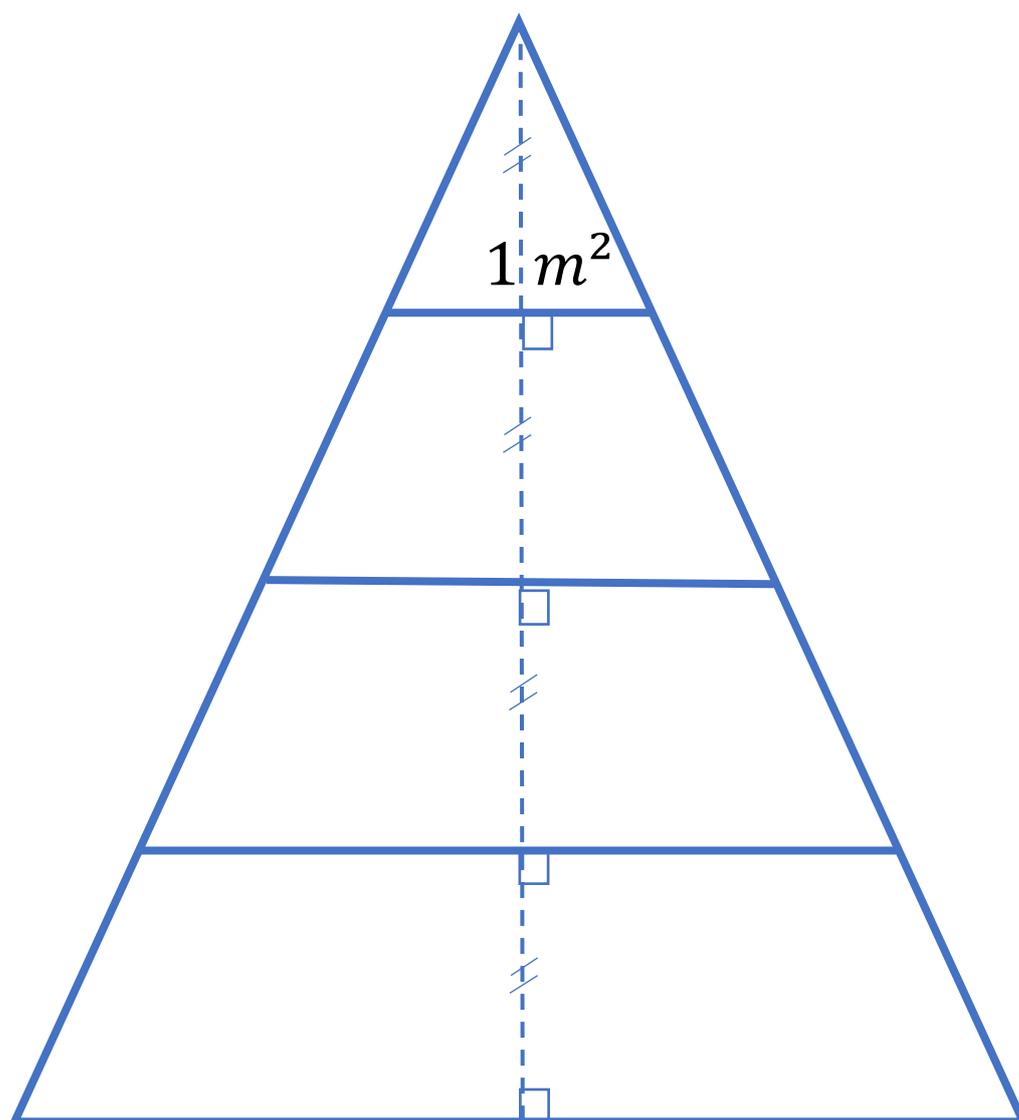
3. Dans un empilement carré de boulets de canon de hauteur 24 boulets, le nombre de boulets est-il un carré parfait ?



Détail des calculs ou de la méthode :

SÉRIE XII – MESURES

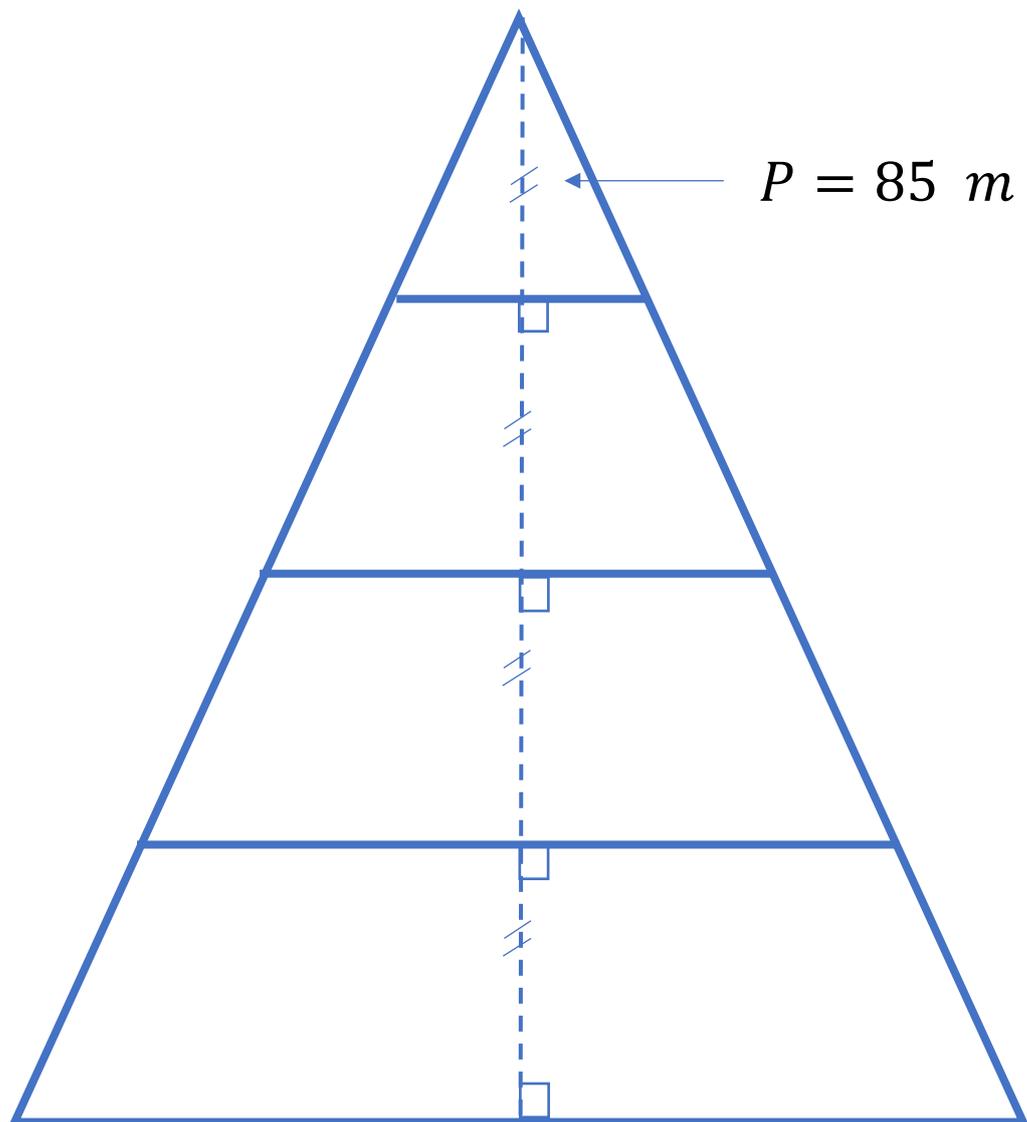
1. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à son aire (la figure n'est pas à l'échelle).



Détail des calculs ou de la méthode : **agrandissements...** les longueurs des triangles sont multipliées par 2, par 3, par 4, pour chaque triangle en partant du haut donc les aires sont multipliées par 2^2 , 3^2 et 4^2 . On conclut par différences...

(Série XII.)

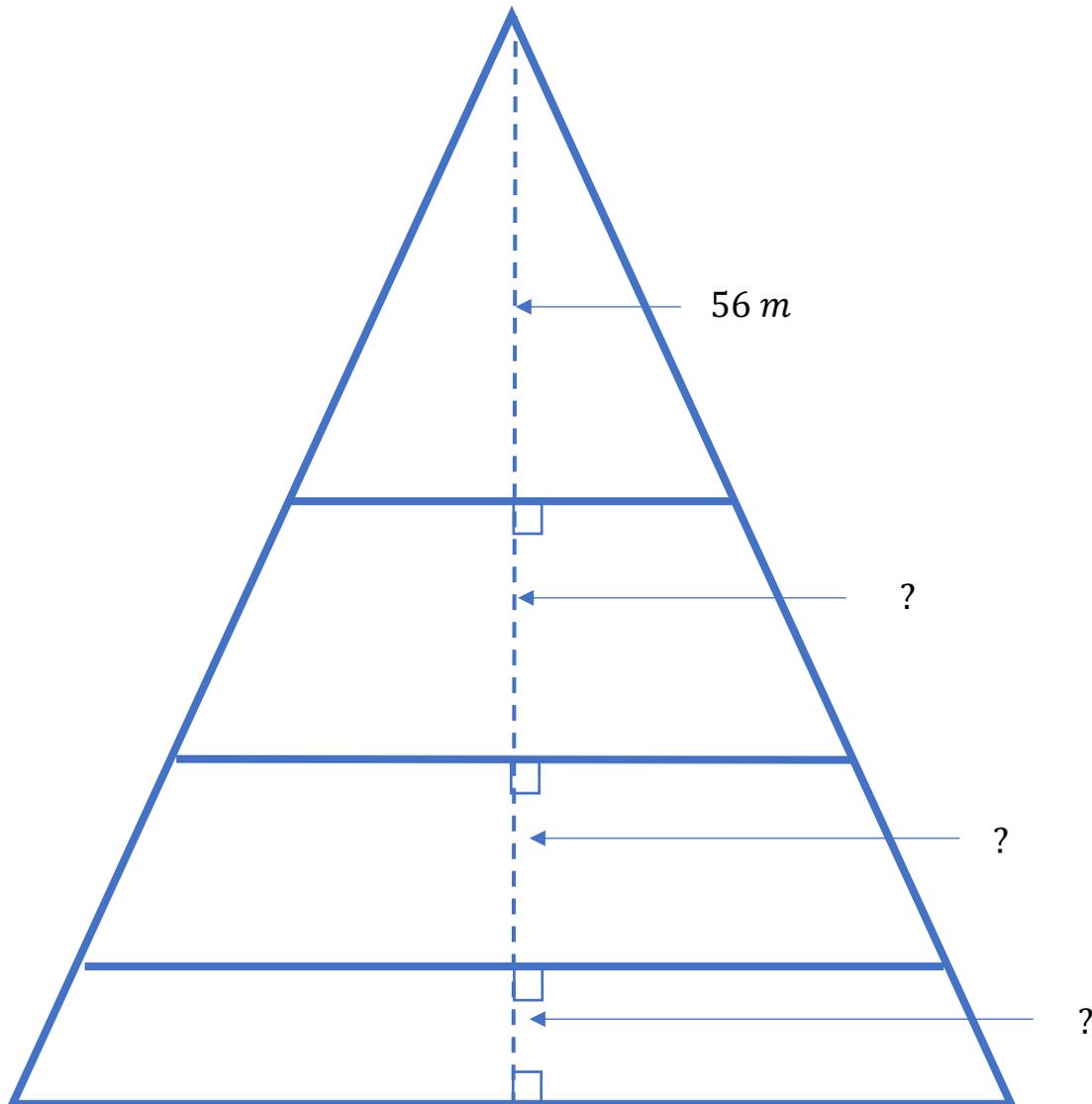
2. Compléter la pyramide sachant que chaque case est égale à son périmètre (la figure n'est pas à l'échelle ; la ligne verticale en pointillés est un axe de symétrie ; la base du petit triangle du haut mesure 25 m).



Détail des calculs ou de la méthode : **agrandissements...** les longueurs des triangles sont multipliées par 2, par 3, par 4. Il reste quelques calculs pour déterminer les périmètres des trapèzes...

(Série XII.)

3. Compléter la pyramide sachant que chaque case a la même aire (la figure n'est pas à l'échelle ; la ligne verticale en pointillés est un axe de symétrie).



Détail des calculs ou de la méthode : **agrandissements...** les aires des triangles (en partant du haut) sont multipliées par 2, par 3, par 4, donc les longueurs sont multipliées par $\sqrt{2}$, par $\sqrt{3}$ et par $\sqrt{4}=2$...